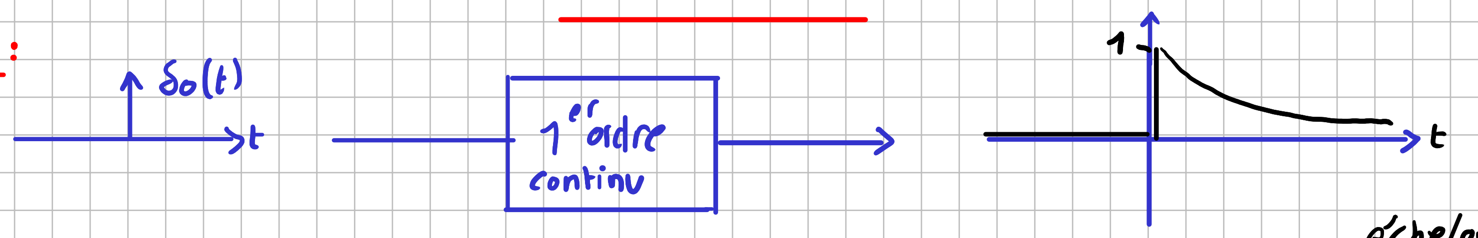
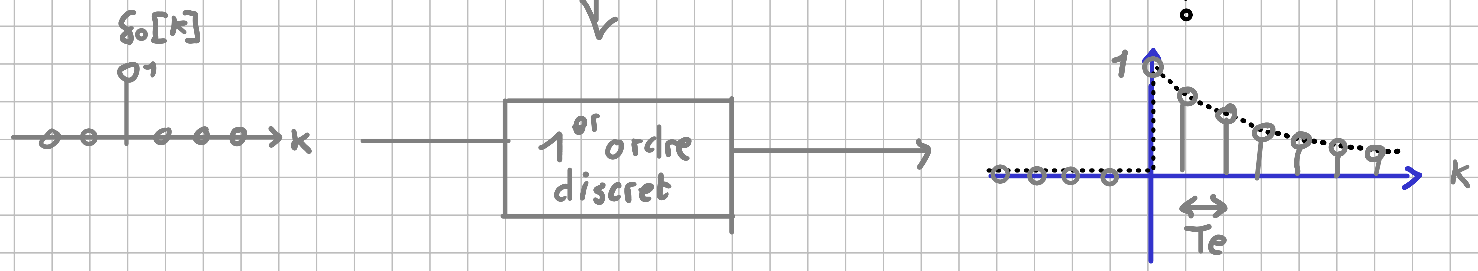
TD MA

Q1 :



$\Gamma(t) = u(t) =$ échelon ou unit step

$t \leftrightarrow kT_e$ discrétisation



$h(t) = e^{-t/\tau} \cdot \Gamma(t) \longleftrightarrow h(kT_e) = e^{-kT_e/\tau} \cdot \Gamma(kT_e) \longleftrightarrow h[k] = e^{-kT_e/\tau} \cdot \Gamma[k]$

Fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto e^{-t/\tau} \cdot \Gamma(t)$

Suite numérique $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$
$k \mapsto e^{-k\,T_e/\tau} \cdot \Gamma[k]$

$\vec{h} = \left(e^{-k\,T_e/\tau} \cdot \Gamma[k]\right)_{k \in \mathbb{Z}}$

On remarque que $e^{-k\,T_e/\tau} = (\underbrace{e^{-T_e/\tau}}_{a})^k = a^k$ avec $\boxed{a = e^{-t/\tau}}$

" L'exponentielle $e^{-t/\tau}$ discrétisée est une suite géométrique a^k "

Q2 :

$a = 2 \Updownarrow \tau = \frac{-1}{\ln a} < 0$

$\Downarrow$

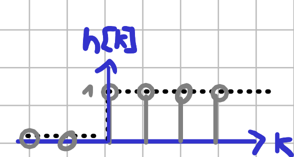
$h[k] \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$

$\Downarrow$

Non stable

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Non BIBO stable}}$



$a = 1 \Updownarrow \tau = +\infty$ $\quad h[k] = \Gamma[k]$

$\Downarrow$

$h[k] \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$

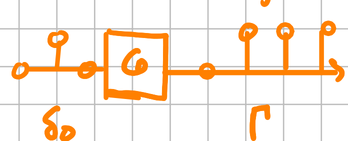
$\Downarrow$

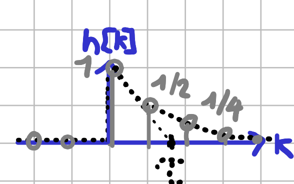
Non stable

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Non BIBO stable}}$

$a = 0 \Leftrightarrow$ intégrateur





$a = \frac{1}{2} \Updownarrow \tau = \ln 2 > 0$ $\quad h[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \Gamma[k]$

$\Downarrow$

$h[k] \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$\Updownarrow$

Stable

$\Downarrow$ $\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{1}{2}\right|^k = 2$ CV

$\Downarrow$

$\boxed{\text{BIBO Stable}}$

$|a| < 1 \overset{\text{CNS}}{\Longleftrightarrow} a^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \Leftrightarrow h[k] \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \Leftrightarrow$ Système stable

$|a| < 1 \overset{\text{CNS}}{\Longleftrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} |a|^k = \frac{1}{1-a} \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$ CV $\Leftrightarrow$ BIBO stable

série géométrique

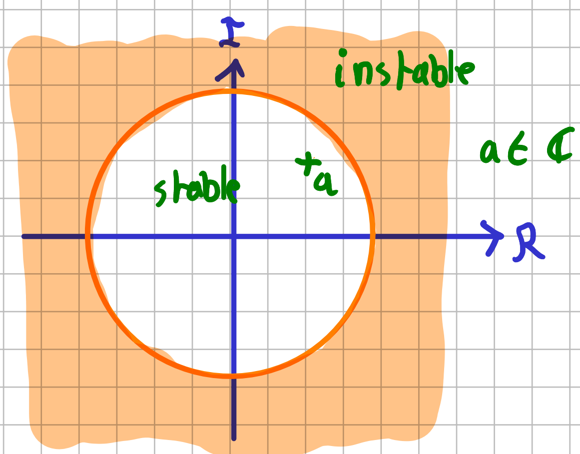
Q2 : stabilité

On va voir (Q4) que $G(z) = \dfrac{z}{z-a}$ et on a pôle de $G(z)$ unique $= a$
car dénom. $= z-a$ s'annule pour $z = a$.

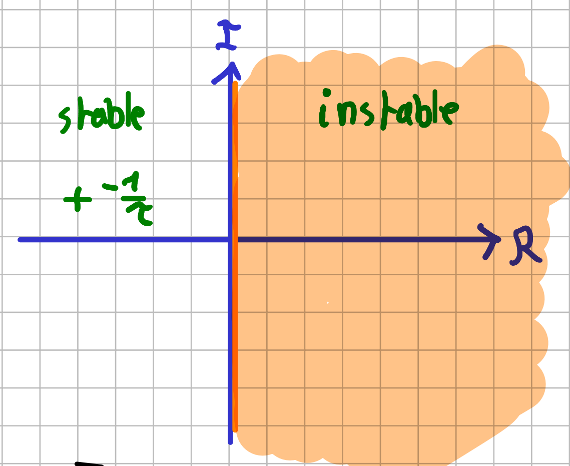
On a vu (2 mars) que $G(p) = \dfrac{1}{1+\tau p} = \dfrac{1/\tau}{p-(-\frac{1}{\tau})}$ et pôle unique $= -\dfrac{1}{\tau}$
car $1+\tau p$ s'annule pour $p = -\dfrac{1}{\tau}$

La CNS de stabilité m̂ si a est complexe !
est $|a| < 1 \iff \sum |a|^k < \infty \iff$ BIBO stable $\Rightarrow$ stable.

Pôles discrets | Pôles continus



$a \in \mathbb{C}$ $\quad\quad$ $\tau \in \mathbb{C}$



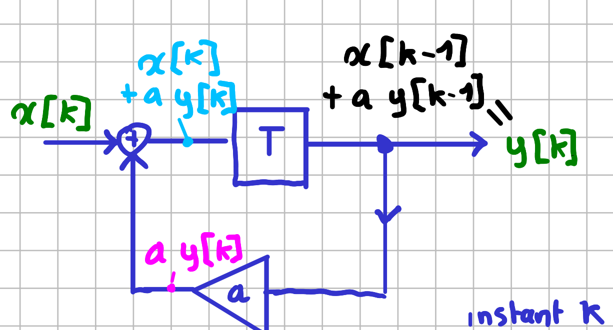
$|a| < 1 \iff |e^{-Te/\tau}| < 1 \iff -\dfrac{Te}{\tau} < 0 \iff -\dfrac{1}{\tau} < 0$

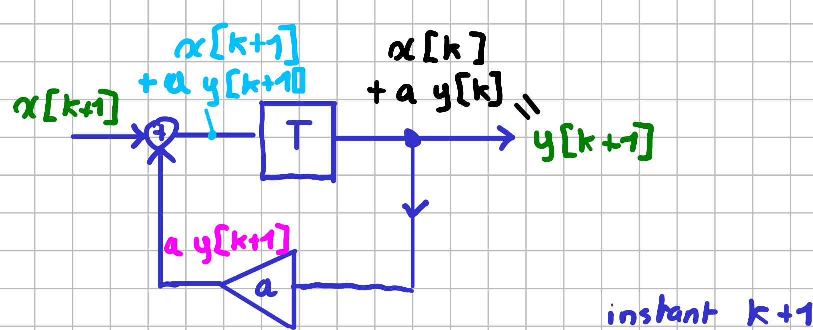
pôle discret a $\quad\quad$ pôle continu $-\dfrac{1}{\tau}$

Les pôles discrets stable sont dans le cercle unité $\quad\quad$ Les pôles continus stables sont dans le demi-plan gauche.

Q3 :

On complète le schéma block par la sortie (car bouclage)
puis puis puis puis





On ferme la boucle et obtient une équation récurrente :

$$y[k] = x[k-1] + a\, y[k-1] \iff y[k+1] = x[k] + a\, y[k], \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Pour la Réponse Impulsionnelle (RIp) : $\quad x \to \boxed{G} \to y = x * h$ (somme de RIp... convolution)

et $\quad x = \delta_0 \to \boxed{G} \to h \quad$ " définition de RIp "

Q3 RI$_p$ h suite :

On calcule la récurrence en se servant de la causalité pour les C.I.

Combinaison de systèmes causaux $\Rightarrow$ 1^{er} ordre causal $\Leftrightarrow$ $h[k]=0$, $k<0$

RI$_p$:
$$y[k] = x[k-1] + a\, y[k-1] \qquad \xrightarrow{x} \boxed{G} \xrightarrow{y}$$
$$h[k] = \delta_0[k-1] + a \,.\, h[k-1] \qquad \xrightarrow{\delta_0} \boxed{G} \xrightarrow{h}$$

$k=-1$: $h[-1] = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\delta_0[-2]}} + a\, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{h[-2]}} = 0 = h[-1]$

C.I.

$k=0$: $h[0] = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\delta_0[-1]}} + a\, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{h[-1]}} = 0 = h[0]$

récurrence

$k=1$: $h[1] = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\delta_0[0]}} + a\, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{h[0]}} = 1 = h[1]$

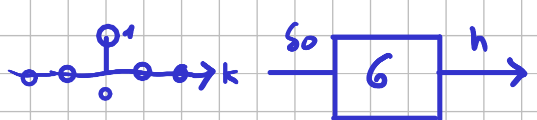
récurrence

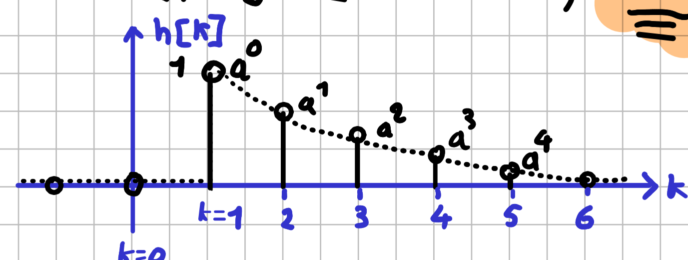
$k=2$: $h[2] = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\delta_0[1]}} + a\, \underset{1}{\underset{\shortparallel}{h[1]}} = a = h[2]$

$\vdots$

par raisonnement récurrent

k : $h[k] = \delta_0[k-1] + a\, h[k-1] = a^{k-1}$, $k>0$



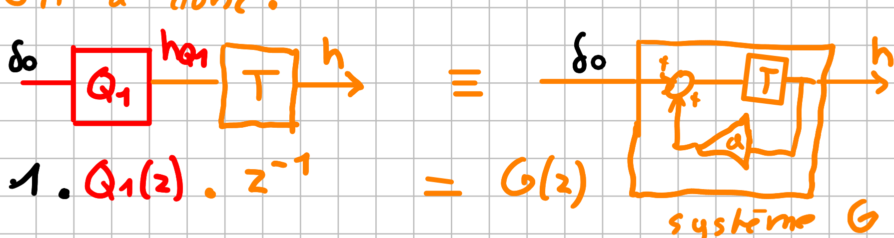


On a pour réponse $h[k] = \begin{cases} a^{k-1} & \text{si } k>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = a^{k-1} \,.\, \underbrace{\Gamma[k-1]}_{=0 \text{ si } k<1}$

Il s'agit de la réponse Q1 MAIS retardée !

$$h_{Q_1}[k] = h[k+1] \Leftrightarrow h[k] = h_{Q_1}\underbrace{[k-1]}_{\text{retard } z^{-1}}$$

On a donc :



$1 \,.\, Q_1(z) \,.\, z^{-1} = G(z)$

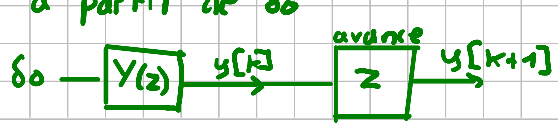
$$\underbrace{Q_1(z)}_{\text{premier ordre discret}} = \frac{G(z)}{z^{-1}} = \underbrace{z}_{\text{avance}} .\, G(z)$$

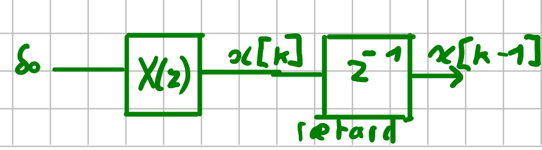
Q4 : $y[k+1] = x[k] + a\, y[k]$ ou $y[k] = x[k-1] + a\, y[k-1]$

on traduit en systèmes — transformée en z

$\underset{\text{avance}}{z} \,.\, Y(z) = X(z) + a\, Y(z)$ ou $Y(z) = \underbrace{z^{-1}.\, X(z)} + a\, z^{-1}.\, Y(z)$

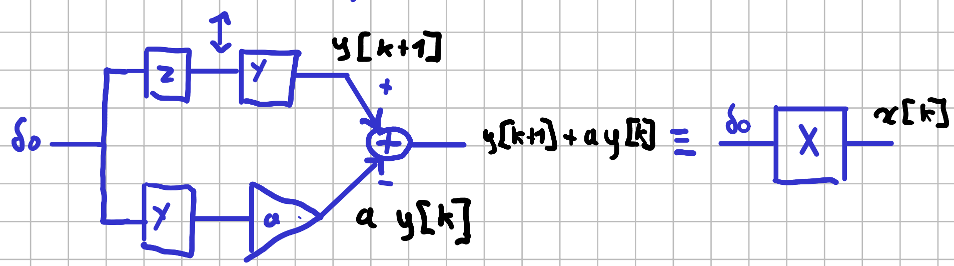
système qui fabrique y à partir de δ0





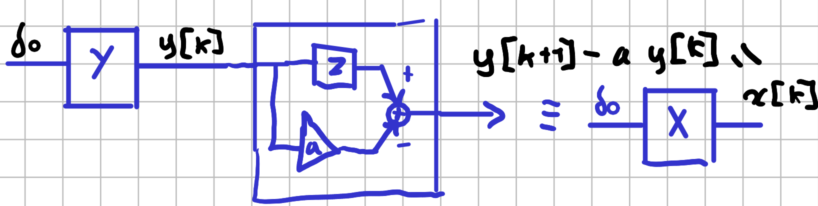
Les systèmes s'ajoutent, s'inversent comme des nombres (m̂ algèbre)

$$z\,.\,Y(z) - a\,Y(z) = X(z) \quad \text{ou} \quad Y(z) - a\,z^{-1}\,Y(z) = z^{-1}\,.\,X(z)$$

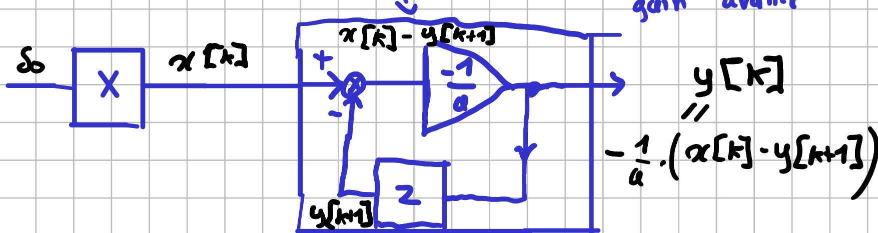


donc $x[k] = y[k+1] - a\,y[k]$

$$(z - a)\,.\,Y(z) = X(z) \quad \text{ou} \quad (1 - a.z^{-1})\,.\,Y(z) = z^{-1}\,X(z)$$

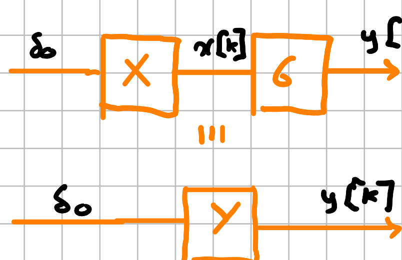


$$Y(z) = \underbrace{(z - a)^{-1}}_{\text{système inverse de } \underbrace{-a}_{\text{gain}} + \underbrace{z}_{\text{avance}}}\,.\,X(z) \quad \text{ou} \quad Y(z) = (1 - a.z^{-1})^{-1}\,.\,z^{-1}\,X(z)$$



$$Y(z) = \underbrace{\frac{1}{z - a}}_{G(z)}\,.\,X(z) \quad \text{ou} \quad Y(z) = \underbrace{\frac{z^{-1}}{1 - a\,z^{-1}}}_{G(z)}\,.\,X(z)$$

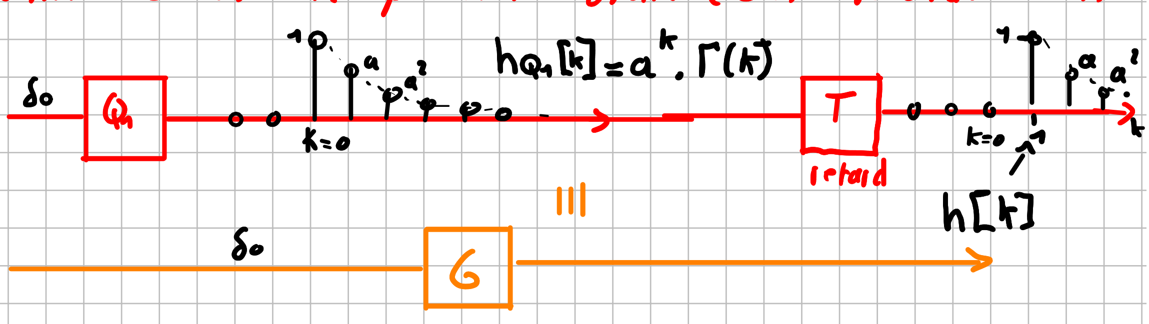
"fonction de transfert discrète"



$$Y(z) = G(z)\,.\,X(z)$$

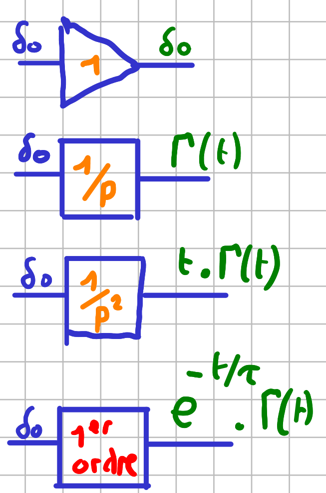
Comme le système G est le premier ordre (Q_1) retardé (Q_1)

on a bien



$$\underbrace{G(z)}_{\substack{\text{le système} \\ \text{du schéma block}}} = \underbrace{Q_1(z)}_{\substack{\text{premier} \\ \text{ordre.}}}\,.\,\underbrace{z^{-1}}_{\text{retard}}$$

On construit la table de transformée de Laplace :



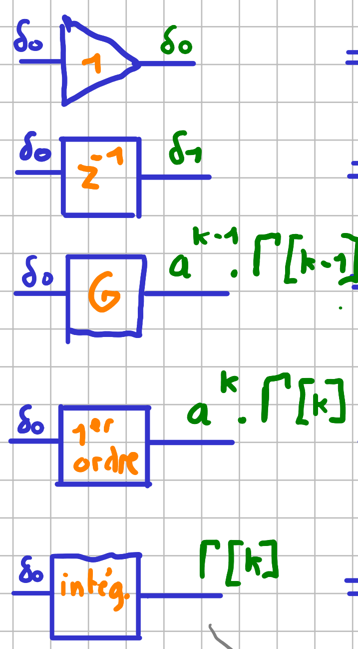
$\Rightarrow \mathcal{L}\{\delta_0\} = 1$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{\Gamma\} = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{t\,\Gamma(t)\} = \frac{1}{p^2}$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-\frac{t}{\tau}}.\Gamma(t)\} = \frac{1}{1+\tau p}$

On construit la table de transformées en $\mathcal{Z}$



$\Rightarrow \mathcal{Z}\{\delta_0\} = 1$

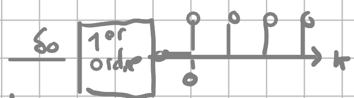
$\Rightarrow \mathcal{Z}\{\delta_1\} = z^{-1}$

$\Rightarrow \mathcal{Z}\{a^{k-1}.\Gamma[k-1]\} = \frac{1}{z-a}$

$\Rightarrow \mathcal{Z}\{a^k.\Gamma[k]\} = \frac{z}{z-a}$

$\Rightarrow \mathcal{Z}\{\Gamma[k]\} = \frac{z}{z-1}$

On a vu si $a=1$



pour $a=1$ c'est un intégrateur.

Q5 : récurrence purement autorégressive $y[k+1] = \underbrace{x[k]}_{\text{entrée sans moyenne : pus de MA}} + \underbrace{a\ y[k]}_{\text{partie auto régressive}}$

Non MA et AR, récursif et donc bouclé.

Q6 : $G(z) = \frac{z^{-1}}{1-a.z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1-a.z^{-1}} \cdot \frac{z}{z} = \frac{1}{z-a}$ → pus de zéros → un pôle $z_1 = a$ car $z_1 - a = 0$

- Les zéros ⟷ numérateur ⟷ $G(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots$
  $= \frac{1}{z^{-2}} . (b_0 . z^2 + b_1 z + b_2 + \cdots)$

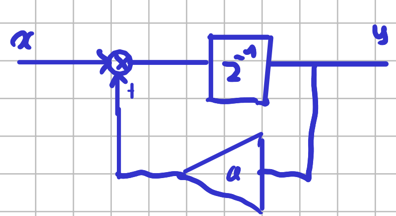
Σ stable ! ⟷ MA ⟷ $y[k] = \sum_{j=0}^{N} b_j . x[k-j]$, 2 pôles $= 0$ ⟷ stable.

- Les pôles ⟷ dénominateur ⟷ récurrence ⟷ $y[k] = x[k] + \underbrace{\sum y[k]}_{AR}$

stable ssi $\underbrace{|z_i| < 1}_{\text{pôles dans le cercle.}}$ ⟷ suite géométriques $a^k . \Gamma[k]$ ⟷ AR

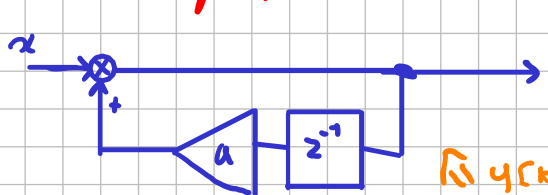
Stable ssi tous les pôles dans le cercle unité.

Q7 :



représentation simplifiée avec 1 retard
⇓
ordre 1 (1er ordre retardé)

Le vrai premier ordre $Q_1(z) = \frac{z}{z-a}$ $\Rightarrow (z-a)\,Y(z) = z\,X(z)$



$\Downarrow$

$z\,Y(z) = z\,X(z) + a\,Y(z)$

$\Downarrow$

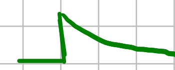
$y[k] = x[k] + a\,y[k-1] \Leftarrow y[k+1] = x[k+1] + a\,y[k]$

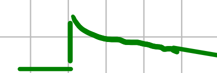
Q8 :

IIR ⇒ AR VRAI car MA ⇒ FIR
$\parallel$
MA ⇒ NON(IIR)

donc par juxtaposée Non(FIR) ⇒ Non(MA)
IIR ⇒ Non (MA)

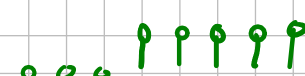
De manière intuitive il faut des suites géométriques pour être asymptotique et pas NUL à l'∞ donc il faut AR mais il ne suffit pas !

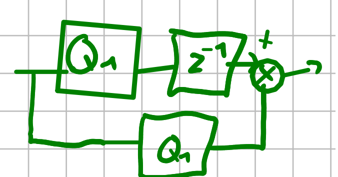
IIR ⇒ $\overline{\text{BIBO}}$ FAUX Contre exemple en cherchant  a^k
telle que $\sum |a^k|$ DV facile !

$\overline{\text{BIBO}}$ ⇐⇒ IIR FAUX raisonnement raciste !
Contre-exemple en cherchant  a^k
qui soit BIBO ⇔ $\sum |a^k|$ CV facile !

$\overline{\text{BIBO}}$ ⇒ IIR VRAI Contraposée
$(\overline{\text{BIBO}} \Rightarrow \text{IIR}) \Leftrightarrow (\overline{\text{IIR}} \Rightarrow \text{BIBO})$
or $\overline{\text{IIR}}$ = FIR et FIR ⇒ BIBO

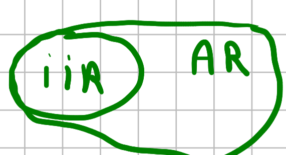
AR ⇔ IIR ⇒ $\overline{\text{BIBO}}$ FAUX IIR ⇒ $\overline{\text{BIBO}}$ FAUX et déjà vu

AR ⇔ IIR FAUX ! Contre exemple 
avec intégrateur $Q_1 = \frac{z}{z-1}$ AR et IIR

Cherchez une combinaison genre 

qui soit FIR ⇒ s'annule

On peut avoir AR et FIR
mais jamais MA et IIR
donc seulement IIR ⇒ AR mais pas de racisme du genre



AR / IIR = FIR = MA
privé de
simplification pôle zéro.

$\frac{z-1}{z-1} = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{z-1}$