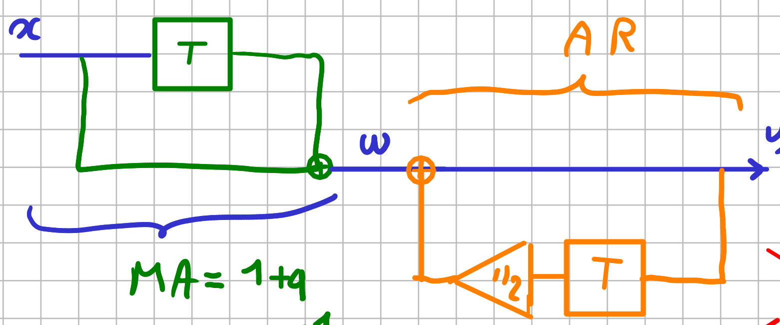
AR-MA

Q1



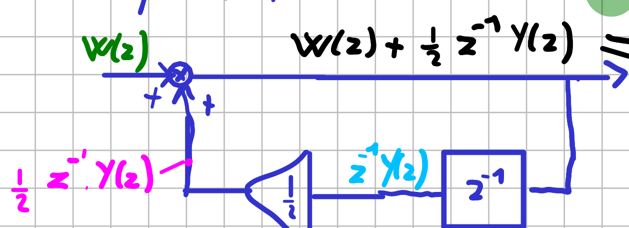
$MA = 1 + q$
$= 1 + z^{-1}$
$= \frac{z+1}{z}$

$AR = \frac{z}{z-1}$

on a $T = q = z^{-1}$

on reconnait un 1er ordre $a = 1/2$

Variante pour AR   On simplifie le schema bloc puis puis puis

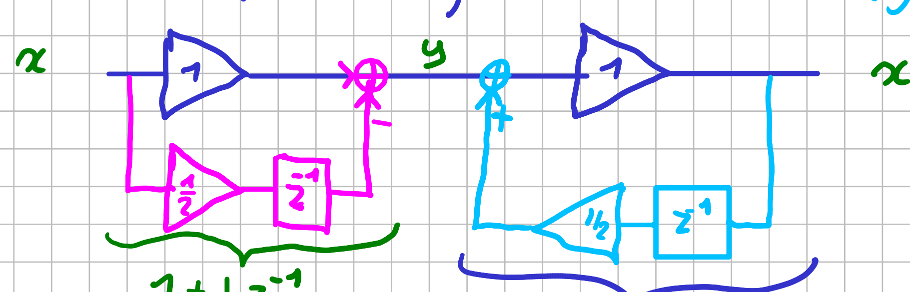


La boucle algébrique est $Y(z) = W(z) + \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{W(z)}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$

Comme $Y(z) = AR(z) \cdot W(z)$ on a bien $AR(z) = \frac{1}{1 - 1/2\, z^{-1}}$

Variante 2 : Une boucle est une inversion de système.

Ici on inverse le gain de 1 et ajouter $\frac{1}{2} z^{-1} x(z)$

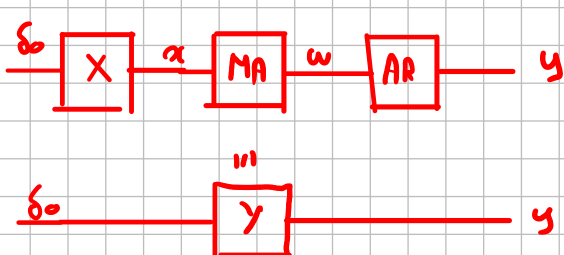


compense le fait de soustraire $\frac{1}{2} z^{-1} X(z)$

On donc AR qui est l'inverse de $1 + \frac{1}{2} z^{-1} \Rightarrow$ $AR(z) = \frac{1}{1 + 1/2\, z^{-1}}$

Q2

$X(z) \cdot (q+1) = W(z)$ et $W(z) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} q} = Y(z)$



$1 \cdot X(z) \cdot MA(z) \cdot AR(z) = Y(z)$

On a donc $MA(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = 1 + q = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z}$

et $AR(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$

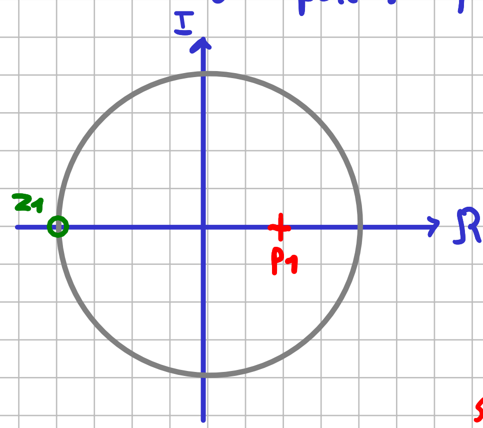
Le tout $\frac{Y(z)}{X(z)} = \underbrace{\frac{Y(z)}{W(z)}}_{MA(z)} \cdot \underbrace{\frac{W(z)}{X(z)}}_{AR(z)} = G(z) = \underbrace{\frac{z+1}{z}}_{MA} \quad \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$

D'où un système ARMA $G(z) = \dfrac{\overbrace{z+1}^{MA}}{\underbrace{z-1/2}_{AR}}$

Q4 : $G(z) = \dfrac{z - \overset{z_1}{\overset{\shortparallel}{(-1)}}}{z - \underset{\underset{p_1}{\shortparallel}}{\frac{1}{2}}}$

un zéro : $z_1 = -1$ représenté par o

un pole : $p_1 = \frac{1}{2}$ représenté par +



zéro associé à MA
donc pas de PB. stab.

pôle associé à AR
$\rightarrow h[k] = p_1^k \, \Gamma[k]$
stable ssi $|p_1| < 1$

Le système n'as qu'un pôle stable, il est stable BIBO $\Downarrow$ stable.

Q5 : Récurrence avec $\dfrac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \dfrac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \dfrac{1+q}{1-\frac{1}{2}q} = G\left(\frac{1}{q}\right)$

Donc $\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) Y(z) = \left(1+z^{-1}\right) X(z)$

$\Rightarrow \quad Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) = X(z) + z^{-1} X(z)$

$\downarrow$ système qui fait $y[k]$ $\quad\quad$ $\downarrow$ retard du système qui fait $x[k]$

$$y[k] - \frac{1}{2}\, y[k-1] = x[k] + x[k-1]$$

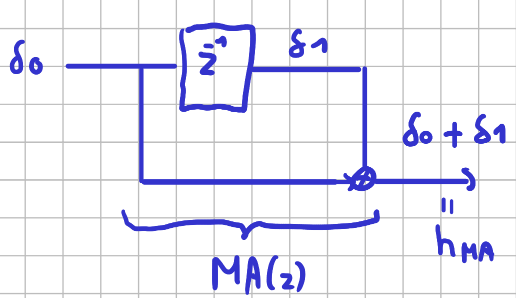
$$y[k] = x[k] + x[k-1] + \frac{1}{2}\, y[k-1]$$

Facile à programmer !

```
x_vieux = x ;
x = get_ADC();
y_vieux = y;
y = x + x_vieux + 0.5 * y_vieux
send_DAC (y)
```

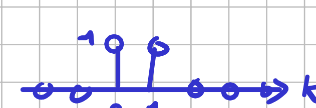
Fonction périodique avec mémoire de x et y

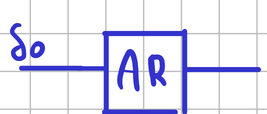
Q5 :



$\delta_0 + \delta_1 = h_{MA}$ la RIP de MA

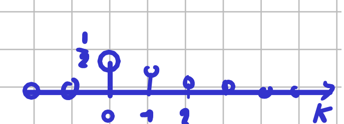
donc $h_{MA} = \delta_0 + \delta_1 =$





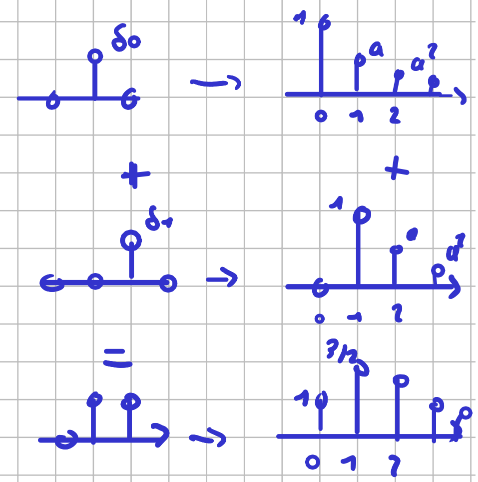
premier ordre
$a = \frac{1}{2}$

$h_{AR}[k] = a^k \cdot \Gamma[k]$ donc $h_{AR} =$



Le système AR.MA = MA.AR car $\frac{z+1}{z} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \cdot \frac{z+1}{z}$

D'où $\delta_0 \longrightarrow \boxed{MA} \xrightarrow{\delta_0 + \delta_1} \boxed{AR} \longrightarrow h$



$$h = AR\{\delta_0\} + AR\{\delta_1\}$$

$$h = h_{AR} + AR\{T\{\delta_0\}\}$$

Comme AR invariant $\Rightarrow$ $h = h_{AR} + T\{AR\{\delta_0\}\}$

$\Rightarrow$ $h = h_{AR} + T\{h_{AR}\}$

$\Rightarrow$ $h = h_{AR}[\cdot] + h_{AR}[\cdot - 1]$

D'où $h[k] = h_{AR}[k] + h_{AR}[k-1] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$$h[k] = a^k \underbrace{\Gamma[k]}_{\text{annule } k<0} + a^{k-1} \underbrace{\Gamma[k-1]}_{\text{annule } k<1}$$

$$h[k] = \begin{cases} 0 & \text{si } k<0 \\ 1 & \text{si } k=0 \\ a^k + a^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \quad \text{avec } a = \frac{1}{2}$$

La somme de 2 suites géométriques

Q6: Lecture de Table.

$G(z) = \frac{z+1}{z} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{z+1}{z-\frac{1}{2}}$ On décompose en élément simples

$$G(z) = \underbrace{\frac{z}{z-\frac{1}{2}}}_{} + \underbrace{\frac{1}{z-\frac{1}{2}}}_{}$$

Dans la table de l'exo 1

Table transformées en Z

$\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \longleftrightarrow k \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \Gamma[k]$

$z^{-1} \cdot \frac{z}{z-1/2} \longleftrightarrow k \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \Gamma[k-1]$

Donc $H(z) = G(z) \cdot 1$ = somme de deux réponses

$$\begin{array}{ccccc} H(z) & = & G(z) & \cdot & 1 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ h & = & h & * & \delta_0 \end{array}$$

$$h = \left(\frac{1}{2}\right)^k \Gamma[k] + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \Gamma[k-1] = \begin{cases} 0 & \text{si } k<0 \\ 1 & \text{si } k=0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Formules et DLs

Les système ont la même algèbre que les nombres

Donc on peut y aller avec les DL Formule du binôme...

$$G(z) = \frac{z+1}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

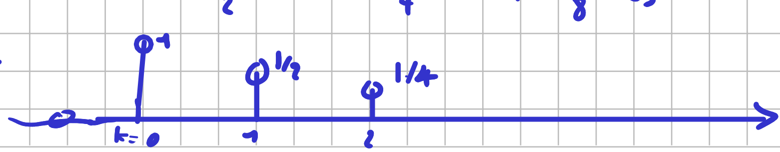
Or on a le developpement en série $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3$

Donc $\frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{2}z^{-1}}_{x}} = 1 + \overbrace{\frac{1}{2}z^{-1}}^{x} + \overbrace{\frac{1}{4}z^{-2}}^{x^2} + \overbrace{\frac{1}{8}z^{-3}}^{} + \cdots\cdots$

Calculatoire!

$$\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2 + \frac{1}{8}\delta_3$$

=



Par division croissante :

$$H(z) = G(z)\cdot 1 = \frac{z+1}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

On fait une division du CM2 mais avec des systèmes !

$$\begin{array}{r|l} 1 + z^{-1} & 1-\frac{1}{2}z^{-1} \\ \hline -\ 1-\frac{1}{2}z^{-1} & 1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\dots \\ \frac{3}{2}z^{-1} & \\ -\ \frac{3}{2}z^{-1}-\frac{3}{4}z^{-2} & \\ \text{reste} = \frac{3}{4}z^{-2} & \end{array}$$

On veut annuler le 1 donc on met 1 fois $1-\frac{1}{2}z^{-1}$

On veut annuler $\frac{3}{2}z^{-1}$ donc on met $\frac{3}{2}z^{-1}\times\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$

On trouve un reste $\frac{1}{4}z^{-2}$ qui veut dire comme pour la division Euclidienne $\begin{array}{r|l} n & d \\ \hline r & q \end{array}$ que $q\cdot d + r = n \Leftrightarrow \frac{n}{d} = q + \frac{r}{d}$

$$\left(1+\frac{3}{2}z^{-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)+\frac{3}{4}z^{-2} = 1+z^{-1}$$

Et donc $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{3/4\, z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

$h = \delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 +$ la suite pour $k \geq 2$ car z^{-2} et plus

En poursuivant la récurrence on a

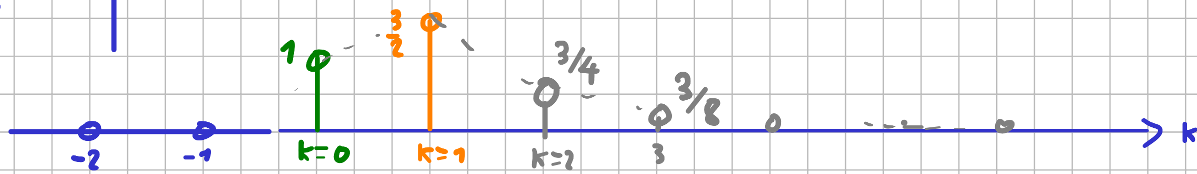
$$H(z) = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} + \frac{3}{8}z^{-3} + \frac{3}{16}\cdot z^{-4} + \dots + 3\,\frac{z^{-k}}{2^k}$$

par raisonnement récurrent

table de transformée en Z

$$h = 1.\delta_0 + \frac{3}{2}\delta_1 + \frac{3}{4}\delta_2 + \frac{3}{8}\delta_3 + \dots + \frac{3}{2^k}\delta_k$$

par somme



$$h[k] = \begin{cases} 0 & \text{si } k<0 \\ 1 & \text{si } k=0 \\ 3/2 & \text{si } k=1 \\ \frac{3}{2^k} & \text{sinon} \end{cases}$$

transitoire dû au MA

Fin des RIPs du AR

Q7 : $h[k]=0$ pour $k<0$ $\Downarrow$ Système causal

Reponse impulsionnelle ne réagit pas avant

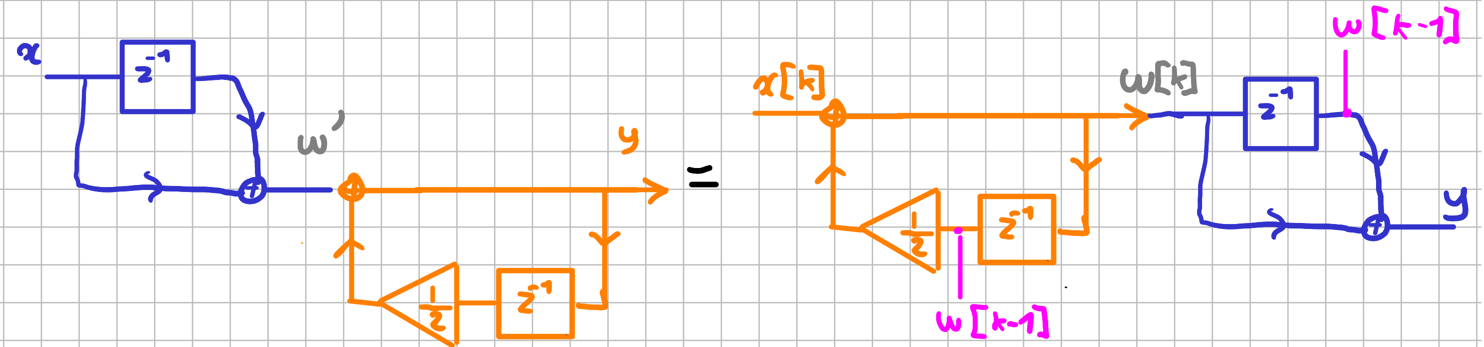
$h[k] \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow$ Système stable

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|h[k]| = 1 + \frac{3}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} 3/2^k$$

$3\times$ Série de Rieman $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ CV

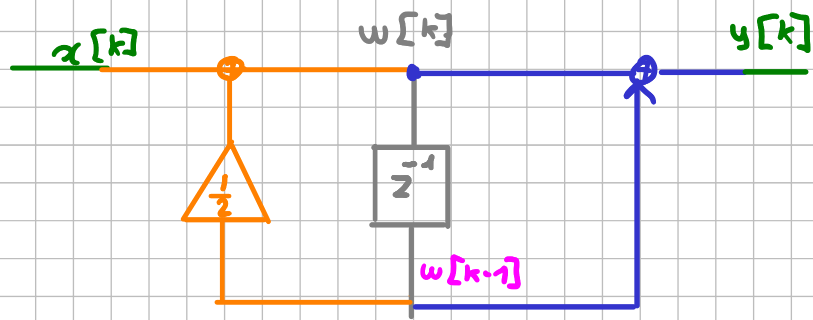
Donc stable BIBO aussi

Q8 : MA . AR = AR . MA



On remarque que les blocs mémorisent deux fois $w[k-1]$!

On peut les regrouper !



Facile à programmer !

```
vieux_w = w;
w = 0.5 * vieux_w + get_ADC()
set_DAC( w + vieux_w )
```

$$w = \overbrace{0{,}5 * vieux\_w}^{AR} + \overbrace{get\_ADC()}^{x}$$

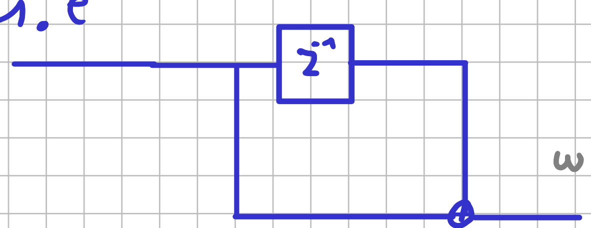
$$set\_DAC(\underbrace{w + vieux\_w}_{MA})$$

Fonction d'interruption périodique avec 1 seule mémoire.

Q9 : Réponse harmonique.

$$AR(\omega) \cdot MA(\omega) = MA(\omega) \cdot AR(\omega) = G(\omega)$$

$\boxed{MA(\omega)}$



$$w' = \underbrace{MA(\omega)}_{\text{gain et déphasage qui dépend de } \omega} . e^{i\omega t}$$

une sinusoïde reste une sinusoïde.

- Discrétisons $e^{i\omega t} \rightarrow e^{i\omega kTe}$

$\boxed{Te = \frac{1}{Fe} = \frac{2\pi}{\omega e}}$

$$e^{i\omega kTe} = e^{i\,2\pi\, f . Te . k} = e^{i.2\pi . \underbrace{\frac{f}{Fe}}_{\tilde{f} \text{ normalisée}} . k}$$

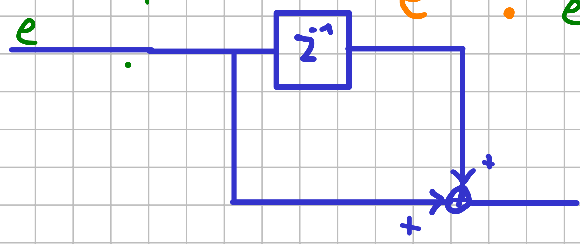
$$= e^{i\,\omega\, k \frac{1}{Fe}} = e^{i\, k . \omega . \frac{2\pi}{\omega e}} = e^{i\, 2\pi . \underbrace{\frac{\omega}{\omega e}}_{\tilde{\omega} = \tilde{f}} . k}$$

Fréquence ou pulsation normalisée

- Trouvons l'équivalent harmonique de $z^{-1} = q$

$$e^{i2\pi(k-1)\tilde{f}} = \underbrace{e^{-i\,2\pi \tilde{f}}}_{= z^{-1}} . e^{i2\pi k \tilde{f}}$$

Donc $1 . e^{i 2\pi \overrightarrow{k \tilde{f}}}$



$e^{-i2\pi\tilde{f}} . e^{i 2\pi \overrightarrow{k \tilde{f}}}$

$\left(1+e^{-i2\pi\tilde{f}}\right) . e^{i 2\pi \overrightarrow{k \tilde{f}}}$

$$MA(\omega) = 1 + e^{-i\omega Te}$$

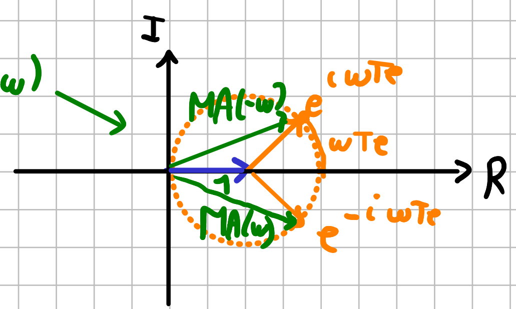
on avait $MA(z) = 1 + z^{-1}$

* On vérifie $MA(\omega)$ = gain et déphasage selon ω de système MA.

MA est réel donc $MA(-\omega) = \overline{MA(\omega)}$

$$MA(-\omega) = 1 + e^{-i(-\omega)Te} \qquad MA(\omega) = 1 + e^{-i\omega Te}$$

$MA(-\omega)$ = conjugué de $MA(\omega)$



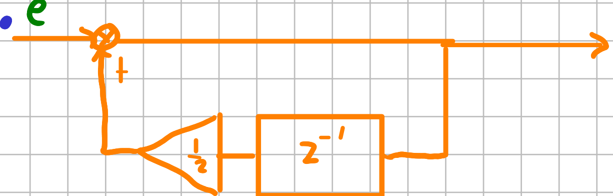
On conserve une somme de conjugués en sortie donc le signal reste réel car le filtre est réel

* On vérifie que $MA(\omega)$ est ωe périodique

$$MA(\omega + n\omega e) = 1 + \underbrace{e^{-i n\omega e Te}}_{e^{-i n 2\pi} = 1} . e^{-i\omega Te} = MA(\omega)$$

$\boxed{AR(\omega)}$

$1 . e^{\overrightarrow{i\omega k Te}}$



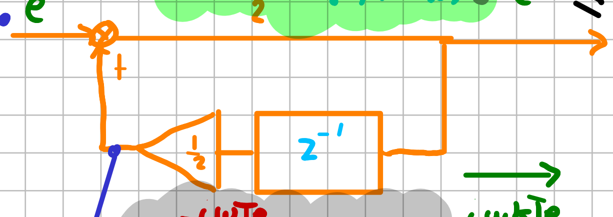
$AR(\omega) . e^{\overrightarrow{i\omega k Te}}$

On pose d'abord que la sortie est d'amplitude et phase $AR(\omega) \in \mathbb{C}$

Puis on propage puis dans le schéma :

$1 . e^{\overrightarrow{i\omega k Te}}$

$1 + \frac{1}{2} e^{-i\omega Te} . AR(\omega) . e^{\overrightarrow{i\omega k Te}} = AR(\omega) . e^{\overrightarrow{i\omega k Te}}$



$\frac{1}{2} \underbrace{e^{-i\omega Te}}_{z^{-1}} . AR(\omega) . e^{\overrightarrow{i\omega k Te}}$

On résoud la boucle avec :

$$1 + \frac{1}{2} e^{-i\omega Te} . AR(\omega) = AR(\omega)$$

d'où $$AR(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-i\omega Te}}$$

On avait $$AR(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

Réponse rapide

$$G(z) = AR(z) \cdot MA(z)$$

et $$G(\omega) = AR(\omega) \cdot MA(\omega)$$

Il suffit de remplacer z^{-1} par son équivalent harmonique

$$z^{-1} \equiv e^{-i\omega Te}$$

$$G(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \overset{z^{-1}=e^{-i\omega Te}}{\equiv} G(\omega) = \frac{1+e^{-i\omega Te}}{1-\frac{1}{2}e^{-i\omega Te}}$$

On simplifie en arc-moitié $\Rightarrow$ $G(\omega) = e^{-i\omega Te/2} \cdot \dfrac{e^{i\omega Te/2} + e^{-i\omega Te/2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot e^{-i\omega Te/2}\left(e^{i\omega Te/2} - e^{-i\omega\frac{Te}{2}}\right)}$

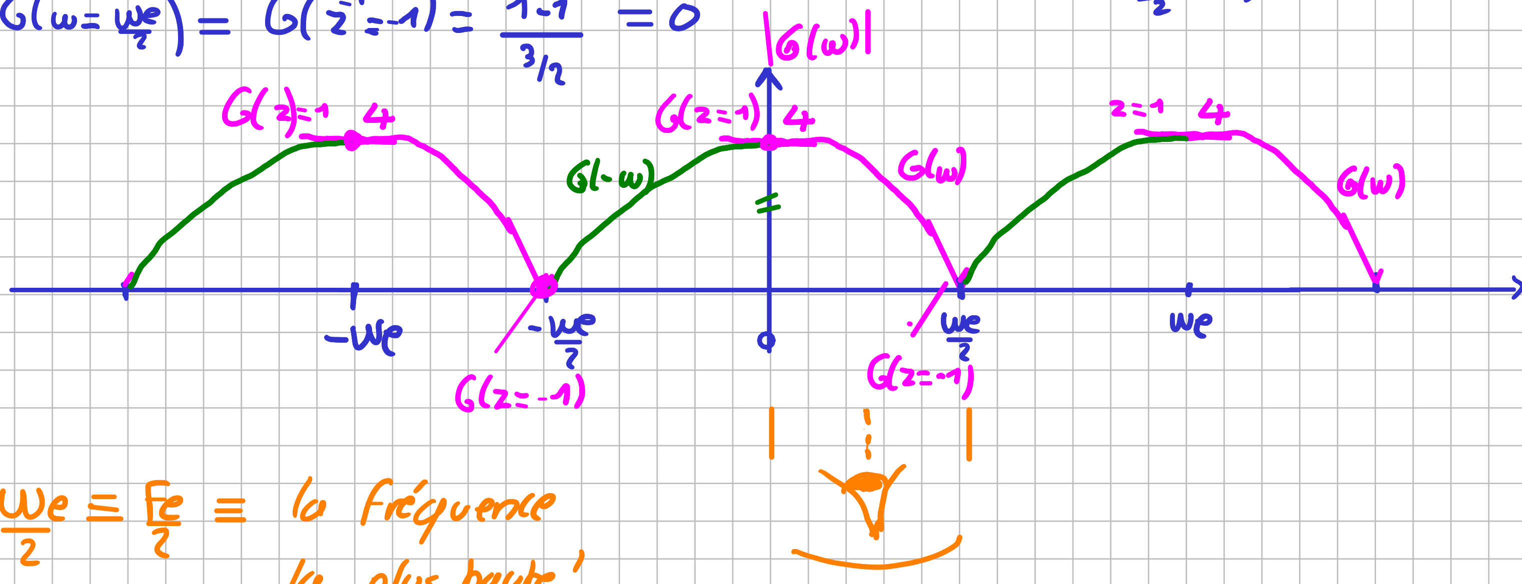
$$G(\omega) = \frac{e^{-i\omega Te/2}}{1/2} \cdot \frac{2\cos(\omega Te/2)}{1+e^{-i\omega Te/2} \cdot 2\sin(\omega Te/2)}$$

$$G(\omega=0) = G(z^{-1}=1) = \frac{1+1}{1-\frac{1}{2}\cdot 1} = 4$$

$\omega \to 0 \Rightarrow z^{-1} = e^{-i\omega Te} \longrightarrow 1$

$$G(\omega = \tfrac{\omega e}{2}) = G(z^{-1}=-1) = \frac{1-1}{3/2} = 0$$

$\omega \to \frac{\omega e}{2} \Rightarrow z^{-1} \longrightarrow e^{-i\pi} = -1$



$\frac{\omega e}{2} \equiv \frac{Fe}{2} \equiv$ la fréquence la plus haute !

C'est un filtre passe-bas !

En discret on ne regarde que $f \in [0 ; \frac{Fe}{2}]$ car le reste est périodique.