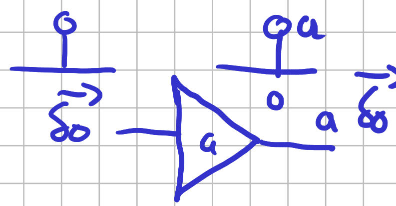
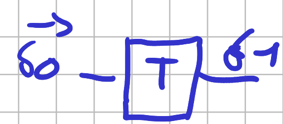
TD MA

Q1) Opérateurs gains $\xrightarrow{a}$ et $\xrightarrow{b}$ sont LTI causaux car



$a.\delta_0[k]=0$ pour $k \leq 0$ (sic: $k<0$)

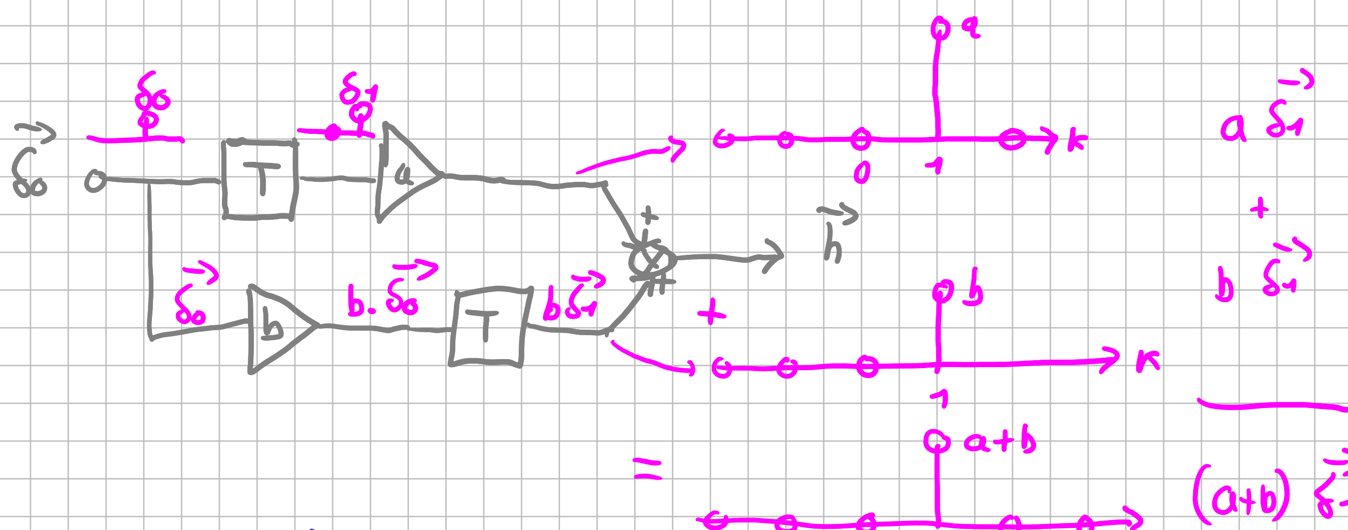
Opérateur retard



est LTI causal.

Le système est combinaison linéaire de Σ^{me} LTI causaux $\Rightarrow$ Σ^{me} LTI causal

Q2)

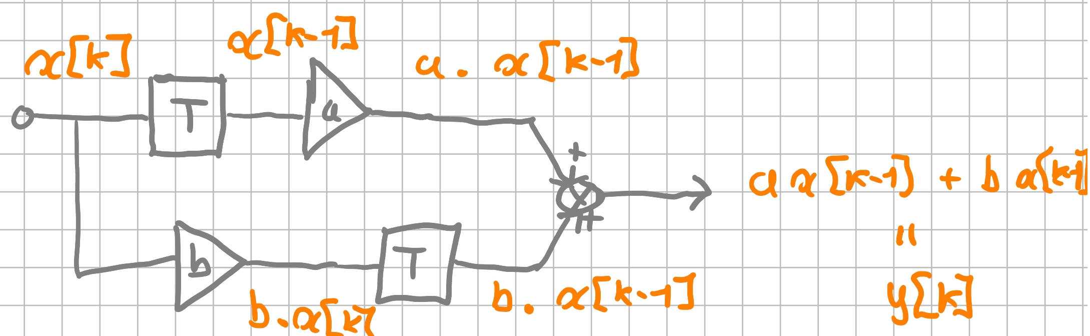


donc $\vec{h} = (a+b)\,\vec{\delta_1}$

$h[k]=0 \;\forall k<0 \Rightarrow H$ causal

cours.

Q3) instant k:



$y[k] = (a+b)\;x[k-1]$

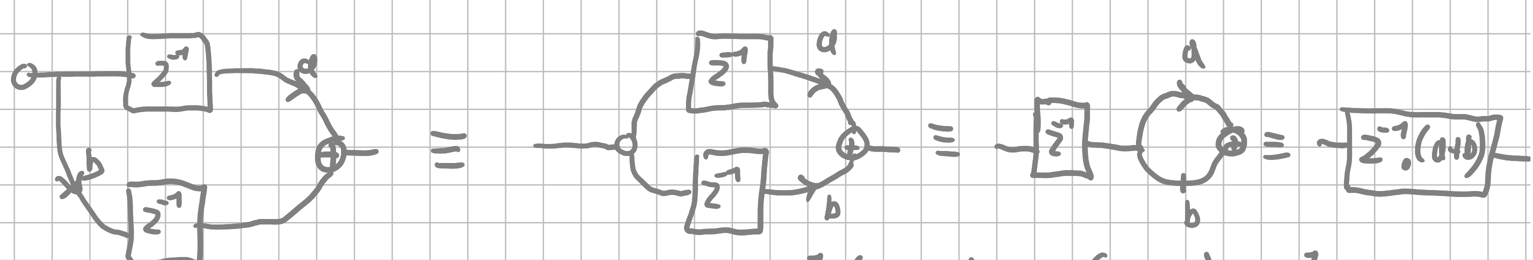
LTI retard de $\vec{x} \Rightarrow$ retard de $\vec{y}$

$y[k+1] = (a+b)\;x[k]$

Récurrence $\quad y[k] + a_1\,y[k-1] = b_0\,x[k] + b_1\,x[k-1] + \dots$

avec $a_1, a_2, \dots = 0$ et $b_2, b_3, \dots = 0$

Donc au maximum une mémoire pour $x \Rightarrow$ ordre 1



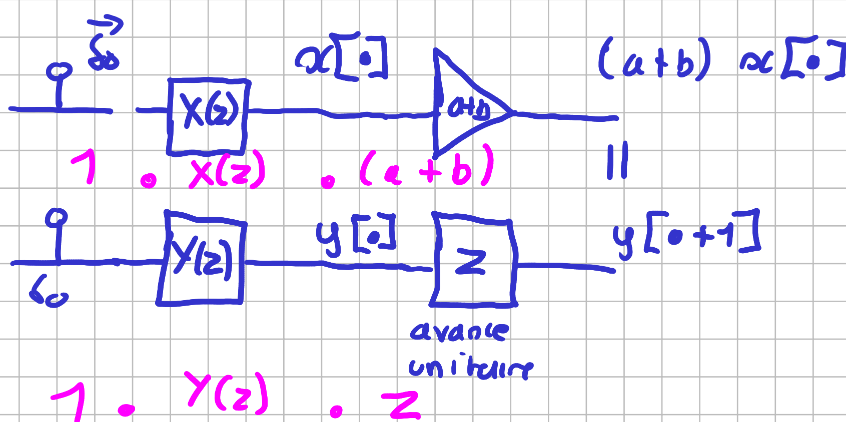
$G(z) = z^{-1}(a+b) = (a+b).z^{-1}$

Auto ~~regressif~~ (AR) ≡ ~~recurrent~~ ≡ ~~bouclé~~

C'est une moyenne glissante (MA) d'un seul élément passé $x[k-1]$ pondérée par $(a+b)$ ...

Q4) • $y[k+1] = (a+b)\, x[k]$

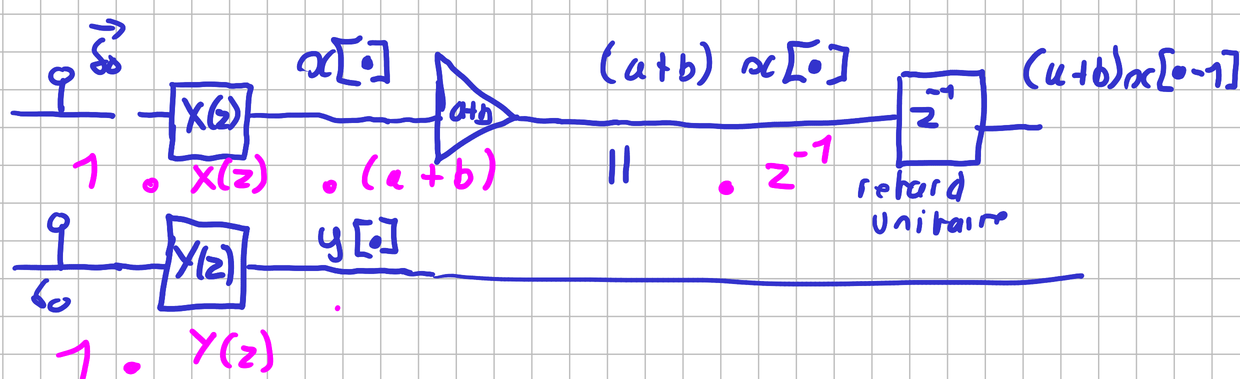
Veut dire



Donc $1 \cdot X(z) \cdot (a+b) = z\, Y(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{(a+b)}{z}\, X(z)$

• $y[k] = (a+b)\, x[k-1]$

Veut dire

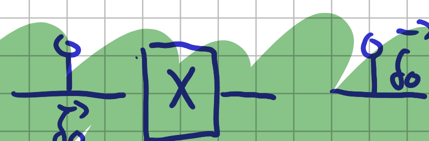


Donc $X(z) \cdot (a+b) \cdot z^{-1} = Y(z) \Rightarrow Y(z) = (a+b)\, z^{-1}\, X(z)$

$Y(z) = \frac{(a+b)}{z}\, \underbrace{z \cdot z^{-1}}_{\text{avance du retard} = \text{gain } 1}\, X(z)$

On trouve le $\hat{m}$ $G(z) = \frac{a+b}{z}$

Q5) $RI_p \Rightarrow \vec{x} = \vec{\delta_0} \equiv$



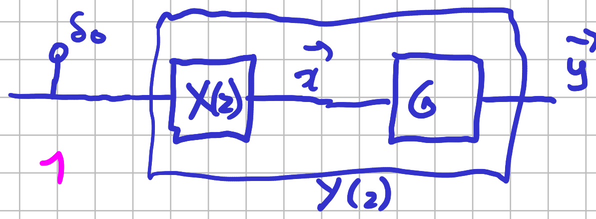
$\Rightarrow X = \mathcal{Z}(\vec{\delta_0})$

$X = 1.$

$1 \cdot 1 = 1.$

Le système X de RI_p $\vec{\delta_0}$ "ne fait rien" donc $\times 1$

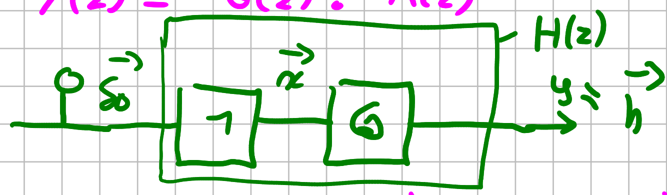
On justifie $\mathcal{Z}\{\vec{\delta_0}\}(z) = 1$ comme $\mathcal{L}[\text{dirac}](p) = 1$ en cours



$1 . X(z) . G(z) = 1 . Y(z)$

$Y(z) = G(z) . X(z)$

pour la RIP. $\vec{x} = \delta_0$, $X = 1$, $\vec{y} = \vec{h}$



$1 . 1 . G(z) = H(z)$

On a donc toujours $H(z) = G(z) =$ fonc° transfert

Ici $H(z) = \frac{(a+b)}{z} = (a+b)\, z^{-1}$

$\mathcal{Z}^{-1}$

$\vec{h} = (a+b) . T\{\vec{\delta_0}\} = (a+b)\, \vec{\delta_1}$

$h[k] = (a+b) . \delta_1[k] \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}$

Q6) $\forall k<0 \quad h[k]=0 \Rightarrow$ système H causal

ici on a m̂ un <u>retard pur</u> : $\forall k<1 \ , \ h[k]=0$

Q7) En cours.
$$\left(\begin{array}{l} \text{Bounded Input} \quad |x[k]| < M \quad \forall k \\ \Longrightarrow \\ \text{Bounded Output} \quad |y[k]| < M' \quad \forall k \end{array} \right.$$

Stabilité BIBO on montre que

BIBO stable $\Leftrightarrow \quad y = x * h = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x[j]\ h[k-j] < M'$

Si $\sum h[k]$ est absolument CV $\Rightarrow \quad y < M'$

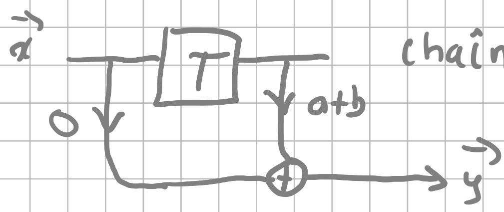
Donc $\underbrace{\sum h[k]}_{\text{suite}}$ est ACV $\Rightarrow$ BIBO stable

suite géométrique, Rieman etc.

Stable autom $\Leftrightarrow \quad h[k] \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ suffit....

Ici $\sum h[k] = (a+b)$ donc ACV

Ainsi si MA $\Rightarrow$ FIR $\Rightarrow$ $\underbrace{\sum h[k]}_{\text{car } \Sigma \text{ finie.}}$ ACV $\Rightarrow$ BIBO stable $\Downarrow$ stable autom.

Q8) 

chaîne de retard d'ordre 1.

Q9)

- MA $\Rightarrow$ FIR oui car chaîne d'ordre fini...
- FIR $\Rightarrow$ BIBO oui Q7
- ~~BIBO $\Rightarrow$ FIR~~ $\exists\ \sum h[k]$ ACV et $\sum$ infinie
  par exemple $\left(\frac{1}{2}\right)^k$
  c'est les système récursifs
  donc $\exists$ FIR ET BIBO FIR.

cf

- ~~BIBO $\Leftarrow$ FIR~~ car BIBO $\not\Rightarrow$ FIR car
- MA $\Rightarrow$ FIR $\Rightarrow$ $\sum h[k]$ Finie $\Rightarrow$ $\sum h[k]$ ACV $\Rightarrow$ BIBO $\Downarrow$ stable
- BIBO $\not\Leftarrow$ FIR ~~FIR $\Rightarrow$ MA~~
  car on va voir que $\exists$ AR $= \overline{MA}$ et FIR