Exercice 1 – ***(Séries numériques)***

Soit (u_n) une série de réels positifs et (v_n) la suite telle que $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ converge.

Exercice 2 – ***(Convergence de la série d'une suite récurrente)***

Soit u la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = sin(u_n)$.

1. Etudier la convergence.
2. Déterminer un réel α tel que la suite $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite réelle non nulle.
3. Trouver un équivalent de u_n. En déduire la nature de la STG u_n.

Exercice 3 – ***(Limite d'une suite)***

Soit $a > 0$ et (u_n) une suite décroissante de réels positifs. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} n^\alpha u_n$ converge.

Montrer que $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+1} u_n = 0$.

Exercice 4 – ***(Convergences de séries)***

1. Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$.
2. Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n + (-1)^n \sin(n)}$.

Exercice 5 – ***(Limite)***

Déterminer $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

Exercice 6 – ***(Produits)***

1. Etudier la série de terme général $v_n = \displaystyle\prod_{q=2}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}\right)$.

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

2. Vérifier la semi-convergence de la série $\sum u_n$.
3. Montrer que $(\sum u_n)^2$ ne converge pas.
4. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sigma(3p) = 2p, \sigma(3p+1) = 4p+1, \sigma(3p+2) = 4p+3$. On admet que σ est une permutation de $\mathbb{N}$. Que dire de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$?

Exercice 7 – ***(Comparaison)***

Soit $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer un équivalent de I_n.
2. Nature de la série de terme général $(I_n)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Questions de cours

- Enoncer les résultats sur les séries de Bertrand et démontrer le cas $\alpha > 1$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que $\forall\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}, \sum u_n e^{i\theta}$ converge.
- (u_n) est de Cauchy ssi (u_n) est convergente.