

**Exercice 1 – (CVD et suite)**

Soit  $d > 0$ . Soit  $g \in C^0([0, d])$  telle que  $g(0) \neq 0$

1. Rappeler la caractérisation séquentielle de la limite.
2. Construire une fonction  $g_t$  continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ , bornée, telle que  $\int_0^d e^{-tx} g(x) dx = \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} e^{-x} g_t(x) dx$
3. Montrer que  $\int_0^d e^{-tx} g(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}$

**Exercice 2 – (Série de fonctions)**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive et décroissante.  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$  où  $x \in [0, 1]$

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions  $\sum u_n$ .
2. Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série  $\sum \frac{a_n}{n}$ .
3. Montrer que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément si, et seulement si,  $a_n \rightarrow 0$ .

**Exercice 3 – (Convergence uniforme ?)**

Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définie sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$ .

1. Etudier la CVS.
2. Calculer  $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$  et la limite de  $I_n$ . En déduire que la suite  $(f_n)$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, 1]$ .
3. Prouver la non CVU d'une autre façon.

**Exercice 4 – (Jolie relation)**

$\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x)$  où  $x \in ]0, 1]$  et  $u_n(0) = 0$ .

1. Calculer  $\sum u_n(x)$ .
2. Montrer que  $\sum u_n$  CVU sur  $[0, 1]$ .
3. En déduire que  $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$

**Exercice 5 – (Limite d'une série)**

On considère une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , continue et telle qu'il existe un réel  $C > 0$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}.$$

Pour tout  $h > 0$ , on pose :

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh).$$

On fixe  $h > 0$ , et on considère la fonction

$$\phi_h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right).$$

1. Montrer que  $S(h) = \int_0^{+\infty} \phi_h(t) dt$ .
2. Montrer que, pour tous  $h \in ]0; 1]$  et  $t \in [1; +\infty[$ , on a :

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$

3. En déduire que

$$S(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

**Exercice 6 – (Série entière)**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite telle que  $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) dt$ .

1. Trouver la limite de  $(a_n)$ .
2. Trouver une relation simple entre  $a_n$  et  $a_{n+2}$ .
3. Donner la nature de la série  $\sum \frac{a_n}{n^\alpha} x^n$  selon les valeurs de  $x$  et  $\alpha$  (rayon + bord).
4. Trouver une expression de  $f(x) = \sum a_n x^n$

**Questions de cours**

- $\xi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et donner le DSE de  $\sin(u)$  (sans démo)
- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère  $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ . Pour quelles valeurs de  $\alpha$  a-t-on CVU sur  $[0, 1]$  et donner le DSE de  $\ln(1+u)$  (sans démo)
- $\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}}$  et donner le DSE de  $(1+u)^\alpha$  (sans démo)