Exercice 1 – ***(Isométrie)***

Soit F un sev d'un espace vectoriel euclidien E, et $f \in O(E)$ telle que $f(F) \subset F$.
Montrer que $f(F) = F$ et $f(F^{\perp}) = F^{\perp}$

Exercice 2 – ***(Petits résultats)***

Chaque question est indépendante.

1. Soit A symétrique réelle inversible et semblable à son inverse. Montrer que $tr(A^2) \geq n$.

2. Soit E espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux ssi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, ||x + \lambda y|| \geq ||x||$.

3. Soit A matrice carrée de taille n. Montrer que $rg(A^T A) = rg(A)$

Exercice 3 – ***(Condition d'inversibilité)***

Soit A une matrice réelle vérifiant

$$\forall i \in [\![1; n]\!], a_{i,i} \geq 1, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}^2 < 1$$

1. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, X^T A X > 0$
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 4 – ***(Loi jointe)***

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi jointe de X et Y vérifie :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X = j, Y = k) = a\frac{j + k}{2^{j+k}}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$

Exercice 5 – ***(Fonctions génératrices)***

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \Longleftrightarrow X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m$$

.

1. Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.
2. Déterminer la loi et la fonction génératrice de $S_m - S_{m-1}$, pour $m \geq 2$.
3. Déterminer la fonction génératrice de S_m, puis sa loi.

Indication : On admet que $\forall r \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1; 1[$,

$$\frac{1}{(1 - x)^{r+1}} = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}$$

Exercice 6 – ***(Moments, pour 5/2)***

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Sous réserve d'existence, on appelle fonction génératrice des moments de X l'application :

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

1. Déterminer M_X si X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
2. On suppose que M_X est définie sur l'intervalle $]-a, a[, a > 0$. Montrer qu'elle est de classe C^{∞} sur cet intervalle et que $\mathbb{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0)$.

Questions de cours

— Soit p un projecteur. Montrer que p est orthognal ssi p est autoadjoint.

— Loi faible des grands nombres

— Fonction génératrice d'une loi géométrique.