Exercice 1 – ***(Isométrie)***

Soit F un sev d'un espace vectoriel euclidien E, et $f \in O(E)$ telle que $f(F) \subset F$.
Montrer que $f(F) = F$ et $f(F^\perp) = F^\perp$

Exercice 2 – ***(Petits résultats)***

Chaque question est indépendante.

1. Soit A symétrique réelle inversible et semblable à son inverse. Montrer que $tr(A^2) \geq n$.
2. Soit E espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux ssi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, ||x + \lambda y|| \geq ||x||$.
3. Soit A matrice carrée de taille n. Montrer que $rg(A^T A) = rg(A)$

Exercice 3 – ***(Matrice orthogonale)***

Soit A une matrice réelle orthogonale.

Montrer que $\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \right| \leq n$.

Exercice 4 – ***(Matrices colones)***

Soit A une matrice carrée de taille n vérifiant :
$\forall X \in \mathbb{R}^n, ||AX|| \leq ||X||$

1. montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, ||A^T X|| \leq ||X||$
2. Montrer que si $AX = X$ alors $A^T X = X$
3. Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = Ker(A - I_n) \oplus Im(A - I_n)$

Exercice 5 – ***(Condition d'inversibilité)***

Soit A une matrice réelle vérifiant

$$\forall i \in [\![1; n]\!], a_{i,i} \geq 1, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}^2 < 1$$

1. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, X^T AX > 0$
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 6 – ***(Householder)***

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soit A une matrice inversible.

1. Soit a une vecteur **non nul** de E. On définit h, la symétrie orthogonale par rapport à $F = \text{Vect}(a)^\perp$. Expliciter h.
2. Montrer que la matrice de h dans la base canonique s'écrit $H = I_n - 2\dfrac{a.a^T}{||a||^2}$
3. Soient u et v deux vecteurs de E distincts, de même norme. Montrer qu'il existe une unique symétrie orthogonale $\tilde{h}$ telle que $\tilde{h}(u) = v$

On admet le résultat suivant : Soit $i \in [\![1; n]\!]$ alors $\forall j \in [\![1; i-1]\!]$, $h(e_j) = e_j$ avec h symétrie orthogonale telle que $h(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n) = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{i-1} e_{i-1} + \lambda e_i$, avec λ non nul.

4. Montrer qu'il existe $n-1$ matrices $H_1, ..., H_{n-1}$ dites de "Householder" telles que $\forall j \in [\![1; n-1]\!]$, les coefficients sous-diagonaux des j premières colonnes de $A_j = H_j H_{j-1} ... H_1 A$ soient nuls.
5. Expliquer alors comment on obtient la décomposition $A = QR$ avec $Q \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $S \in \mathbb{T}_n(\mathbb{R})$
6. *Question subsidiaire :* Les matrices de Householder de la question 4) sont-elles uniques ? Comparer la décomposition polaire et la décomposition QR.

Exercice 7 – ***(Polynômes orthogonaux)***

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$

1. Justifier que $\langle ., . \rangle$ est bien défini et que c'est un produit scalaire.
2. Soit $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$ et $(P_0, ..., P_n)$ l'orthonormalisé de Schmidt de $(1, ..., X^n)$. Calculer $P_k(0)^2$.
3. Déterminer une base de $F^\perp$ en l'exprimant à l'aide de $(P_0, ..., P_n)$.
4. En déduire $d(1, F^\perp)$ et $d(1, F)$.

Questions de cours

— Soit p un projecteur. Montrer que p est orthognal ssi p est autoadjoint.

— A symétique réelle et $(X_1, ..., X_n)$ une BON de VEP de A associée à $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i X_i^T$

— $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$ ssi $\forall x \in E, q_u(x) > 0$.