Exercice 1 – ***(Isométrie)***

Soit F un sev d'un espace vectoriel euclidien E, et $f \in O(E)$ telle que $f(F) \subset F$.
Montrer que $f(F) = F$ et $f(F^\perp) = F^\perp$

Exercice 2 – ***(Petits résultats)***

Chaque question est indépendante.

1. Soit A symétrique réelle inversible et semblable à son inverse. Montrer que $tr(A^2) \geq n$.

2. Soit E espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux ssi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, ||x + \lambda y|| \geq ||x||$.

3. Soit A matrice carrée de taille n. Montrer que $rg(A^T A) = rg(A)$

Exercice 3 – ***(Matrice orthogonale)***

Soit A une matrice réelle orthogonale.

Montrer que $\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \right| \leq n$.

Exercice 4 – ***(Matrices colones)***

Soit A une matrice carrée de taille n vérifiant :
$\forall X \in \mathbb{R}^n, ||AX|| \leq ||X||$

1. montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, ||A^T X|| \leq ||X||$

2. Montrer que si $AX = X$ alors $A^T X = X$

3. Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = Ker(A - I_n) \oplus Im(A - I_n)$

Exercice 5 – ***(Condition d'inversibilité)***

Soit A une matrice réelle vérifiant

$$\forall i \in [\![1; n]\!], a_{i,i} \geq 1, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}^2 < 1$$

1. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, X^T A X > 0$
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 6 – ***(Fermés et ouverts)***

Question préliminaire : Soient $(\mathcal{X}, d)$, $(\mathcal{Y}, d')$ deux espaces métriques, et $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ une application continue. Montrer que l'image d'un ouvert (de $\mathcal{Y}$) par f^{-1} est un ouvert (de $\mathcal{X}$).

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$
On pose $A = \left\{ f \in E;\ f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}$ et $O = \{f \in E :\ f(1) > 0\}$.

1. Démontrer que A est un fermé de $(E, \|.\|_\infty)$.
2. Démontrer O est un ouvert de $(E, \|.\|_\infty)$, mais pas de $(E, \|.\|_1)$.
3. $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{R})$ sont-ils des ouverts ? fermés ?
4. Montrer de plus que $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Que peut-on alors dire sur $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 – ***(Rayon spectral)***

Soit $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in Sp(A)\}$ le rayon spectral.
On définit aussi $|||A||| = \sup \left\{ \frac{||AX||_2}{||X||_2}, X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \right\} = \sup \{||AX||_2, X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}), ||X||_2 = 1\}$

1. Montrer que $|||A|||$ existe.
2. Montrer que $|||A||| = \rho(A)$

Exercice 8 – ***(Polynômes orthogonaux)***

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$

1. Justifier que $\langle ., . \rangle$ est bien défini et que c'est un produit scalaire.
2. Soit $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$ et $(P_0, ..., P_n)$ l'orthonormalisé de Schmidt de $(1, ..., X^n)$. Calculer $P_k(0)^2$.
3. Déterminer une base de $F^\perp$ en l'exprimant à l'aide de $(P_0, ..., P_n)$.
4. En déduire $d(1, F^\perp)$ et $d(1, F)$.

Questions de cours

— Les boules de E sont des convexes de E.
— Les boules fermées sont des fermés.
— Si A symétique réelle et $(X_1, ..., X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A associée à $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i X_i^T$