Exercice 1 – ***(Rayon spectral)***

Soit $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in Sp(A)\}$ le rayon spectral.
On définit aussi $|||A||| = \sup\left\{\dfrac{||AX||_2}{||X||_2}, X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0\right\} = \sup\{||AX||_2, X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}), ||X||_2 = 1\}$

1. Montrer que $|||A|||$ existe.
2. Montrer que $|||A||| = \rho(A)$

Exercice 2 – ***(Partie convexe)***

Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ une partie convexe et $f : C \to \mathbb{R}$ continue.

1. Démontrer que $f(C)$ est un intervalle.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ continue et injective. Démontrer, à l'aide de la fonction $f(x,y) = h(x) - h(y)$, que h est strictement monotone.

Exercice 3 – ***(Fermés et ouverts)***

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

On pose $A = \left\{f \in E;\ f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1\right\}$ et $O = \{f \in E :\ f(1) > 0\}$.

1. Démontrer que A est un fermé de $(E, \|.\|_\infty)$.
2. Démontrer O est un ouvert de $(E, \|.\|_\infty)$, mais pas de $(E, \|.\|_1)$.
3. $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{R})$ sont-ils des ouverts ? fermés ?
4. Montrer de plus que $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Que peut-on alors dire sur $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 – ***(Valeur d'adhérence)***

Soit $(E, \|.\|)$ un EVN et (u_n) une suite de E. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) dans E : l est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers l.

1. Montrer que $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p :\ p \geq n\}}$
2. En déduire que V est fermé.

Exercice 5 – ***(Fonctions logarithmiquement convexes)***

1. Soit f une fonction convexe croissante et g une fonction convexe. Montrer que $f \circ g$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_*^+$. Montrer que $\ln(f)$ est convexe si et seulement si, $\forall \alpha > 0, f^\alpha$ est convexe.

Exercice 6 – ***(Suites dans un EVN)***

Soit E l'ensemble des suites (a_n) complexes telles que $\sum |a_n|$ converge. Pour $a \in E$, on pose alors $||a|| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$

1. Montrer que $||.||$ est une norme sur E.
2. Soit $F = \left\{a \in E, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1\right\}$. F est-il ouvert, fermé, borné ?

Questions de cours

— Les boules de E sont des convexes de E.
— Les boules fermées sont des fermés.
— f est continue ssi l'image reciproque d'un ouvert est un ouvert.