Exercice 1 – ***(Intégrale à paramètres)***

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $M>0$ telle que, pour tout $x>0$, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|e^{itx}-1|}{|x|}|f(t)|dt \leq M$

1. Montrer que $t\mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Limite en 0^+ de $h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}-1}{x}f(t)dt$

Exercice 2 – ***(Théorème de Weierstrass trigonométrique)***

Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques. Pour f et g dans E, on définit le produit de convulotion par $f*g := \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$.

1. Montrer que $f*g$ est un élément de E.
2. Que dire de $f*g$ si f est C^∞ ?

Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère l'application $u_n:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ définie par $u_n(x)=c_n(1+cos(x))^n$ où $c_n\in\mathbb{R}$ est choisi tel que $\int_0^{2\pi}u_n(t)dt=1$. On pose alors $f_n=f*u_n$. On va montrer que (f_n) CVU vers f sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $\epsilon>0$, on suppose qu'il existe $\eta\in]0,\pi[$ tel que si $|s-t|\leq\eta$ alors $|f(s)-f(t)|\leq\epsilon$. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|u_n(t)dt\leq\epsilon+4||f||_\infty\int_\eta^\pi u_n(t)dt$
4. Justifier que $\int_0^\pi(1+cos(t))^n sin(t)dt\leq\int_0^\pi(1+cos(t))^n dt$.
5. Conclure.

Exercice 3 – ***(Fermés et ouverts)***

Soit $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

On pose $A=\left\{f\in E;\ f(0)=0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt\geq 1\right\}$ et $O=\{f\in E:\ f(1)>0\}$.

1. Démontrer que A est un fermé de $(E,\|.\|_\infty)$.
2. Démontrer O est un ouvert de $(E,\|.\|_\infty)$, mais pas de $(E,\|.\|_1)$.
3. $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{R})$ sont-ils des ouverts ? fermés ?
4. Montrer de plus que $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Que peut-on alors dire sur $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 – ***(Valeur d'adhérence)***

Soit $(E,\|.\|)$ un EVN et (u_n) une suite de E. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) dans E : l est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers l.

1. Montrer que $V=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{u_p:\ p\geq n\}}$
2. En déduire que V est fermé.

Exercice 5 – ***(Fonctions logarithmiquement convexes)***

1. Soit f une fonction convexe croissante et g une fonction convexe. Montrer que $f\circ g$ est convexe.
2. Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}_*^+$. Montrer que $\ln(f)$ est convexe si et seulement si, $\forall\alpha>0, f^\alpha$ est convexe.

Exercice 6 – ***(Suites dans un EVN)***

Soit E l'ensemble des suites (a_n) complexes telles que $\sum|a_n|$ converge. Pour $a\in E$, on pose alors $||a||=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$

1. Montrer que $||.||$ est une norme sur E.
2. Soit $F=\left\{a\in E,\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=1\right\}$. F est-il ouvert, fermé, borné ?

Exercice 7 – ***(Intégrale de Gauss)***

On pose $f(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Relier f' à $F:x\mapsto\int_0^x e^{-t^2}dt$ et en déduire $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$

Questions de cours

- La distance a un fermé est atteinte.
- f est continue ssi l'image reciproque d'un ouvert est un ouvert.
- Soient E et F des espaces vectoriels normés et $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
  1. f est continue
  2. f est continue en 0
  3. f est lipschitzienne
  4. f est bornée sur une boule unité (ouverte ou fermée)
  5. $\exists A,\forall x\in E,\|f(x)\|\leq A\|x\|$