**Exercice 1 –** ***(Exponentielle de matrice)***

On définit l'exponentielle d'une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme la matrice, notée $\mathbf{e}^A$, ou bien $\exp(A)$, définie par

$$\mathbf{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

On introduit, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$f_A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad t \mapsto f_A(t) = \mathbf{e}^{tA}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_A'(t) = A\mathbf{e}^{tA} = \mathbf{e}^{tA}A.$$

On se donne deux matrices $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A$ et $B$ commutent.

1. Montrer que les matrices $A$ et $\mathbf{e}^B$ commutent. On définit une application
$$\begin{array}{cccc} g : \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \mathbf{e}^{t(A+B)}\mathbf{e}^{-tB} \end{array}$$
2. Montrer que l'application $g$, et l'application $f_A$ définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy.
3. En déduire une démonstration de la relation
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{e}^{t(A+B)} = \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{tB} \qquad (1)$$

---

**Exercice 2 –** ***(Intégrale de Gauss)***

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$

1. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Relier $f'$ à $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ et en déduire $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt$

---

**Exercice 3 –** ***(CVD et suite)***

Soit $d > 0$. Soit $g \in C^0([0,d])$ telle que $g(0) \neq 0$

1. Rappeler la caractérisation séquentielle de la limite.
2. Construire une fonction $g_t$ continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, bornée, telle que $\displaystyle\int_0^d e^{-tx}g(x)dx = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-x}g_t(x)dx$
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^d e^{-tx}g(x)dx \underset{t\mapsto+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}$

**Exercice 4 –** ***(Convergence uniforme ?)***

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}.$$

Pour tout $h > 0$, on pose :

$$S(h) = h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh).$$

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\begin{array}{cccc} \phi_h : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \end{array}.$$

1. Montrer que $S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt$.
2. Montrer que, pour tous $h \in ]0;1]$ et $t \in [1; +\infty[$, on a :
$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$
3. En déduire que
$$S(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

---

**Exercice 5 –** ***(Intégrale à paramètres)***

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition $D$ et démontrer que $F$ est continue sur $D$.
2. Démontrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $]1, \infty[$ et que $\forall x > 1, F'(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right)dt$
3. Limite de $F$ en $+\infty$
4. On suppose que $F$ admet une limite $l$ en $1^+$. Démontrer que pour tout $A > 0$ et pour tout $x > 1$, on a : $l \geq \displaystyle\int_1^A \frac{dt}{1+t^x}$
5. En déduire que $F(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$