Exercice 1 – ***(Exponentielle de matrice)***

On définit l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme la matrice, notée $\mathbf{e}^A$, ou bien $\exp(A)$, définie par

$$\mathbf{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

On introduit, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$f_A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad t \mapsto f_A(t) = \mathbf{e}^{tA}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'_A(t) = A\mathbf{e}^{tA} = \mathbf{e}^{tA}A.$$

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B commutent.

1. Montrer que les matrices A et $\mathbf{e}^B$ commutent. On définit une application
$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & t & \longmapsto & \mathbf{e}^{t(A+B)}\mathbf{e}^{-tB} \end{array}$$
2. Montrer que l'application g, et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy.
3. En déduire une démonstration de la relation
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{e}^{t(A+B)} = \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{tB} \qquad (1)$$

Exercice 2 – ***(CVD et suite)***

Soit $d > 0$. Soit $g \in C^0([0, d])$ telle que $g(0) \neq 0$

1. Rappeler la caractérisation séquentielle de la limite.
2. Construire une fonction g_t continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, bornée, telle que $\displaystyle\int_0^d e^{-tx}g(x)dx = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-x}g_t(x)dx$
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^d e^{-tx}g(x)dx \underset{t\mapsto+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}$

Exercice 3 – ***(Wronskien)***

On considère sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : \quad ty'' + (1 - 2t)y' + (t - 1)y = 0$$

1. Vérifier que $\phi(t) = e^t$ est une solution de (E).

Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), on définit le wronskien par le déterminant $w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}$

2. Déterminer une expression du wronskien $w(t)$, de deux solutions y_1 et y_2 de (E)
3. En déduire qu'il existe une solution de (E) indépendante de ϕ et exprimer la solution générale de (E).

Exercice 4 – ***(Absolument !)***

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y'' + y = \cos(nt)$$
2. Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Résoudre l'équation différentielle
$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

Exercice 5 – ***(Raccord)***

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1$$

1. Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ par $g(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$

2. Montrer que g se prolonge sur $]-1, +\infty[$ par une fonction de classe C^∞.
3. Démontrer que (E) admet une solution de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6 – ***(Où est l'équa diff ?)***

Soit f une fonction réelle continue sur $[0, 1]$ et λ un réel. Trouver u, une fonction réelle continue sur $[0, 1]$ telle que

$$u(x) = \lambda \int_0^x u(t)\mathrm{d}t + f(x)$$