

**Exercice 1 – (Séries numériques)**

Soit  $(u_n)$  une série de réels positifs et  $(v_n)$  la suite telle que  $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$ .

1. Montrer que si  $\sum u_n$  converge, alors  $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$  converge.
2. Montrer que  $\sum u_n$  converge ssi  $\sum v_n$  converge.

**Exercice 2 – (Convergence de la série d'une suite récurrente)**

Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$ .

1. Etudier la convergence.
2. Déterminer un réel  $\alpha$  tel que la suite  $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$  ait une limite réelle non nulle.
3. Trouver un équivalent de  $u_n$ . En déduire la nature de la STG  $u_n$ .

**Exercice 3 – (Limite d'une suite)**

Soit  $a > 0$  et  $(u_n)$  une suite décroissante de réels positifs. On suppose que la série  $\sum_{n \geq 0} n^\alpha u_n$  converge.

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha+1} u_n = 0$ .

**Exercice 4 – (Convergences de séries)**

1. Nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ .
2. Nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n + (-1)^n \sin(n)}$ .

**Exercice 5 – (Limite)**

Déterminer  $\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}$ .

**Exercice 6 – (Produits)**

1. Etudier la série de terme général  $v_n = \prod_{q=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}\right)$ .

Soit  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ .

2. Vérifier la semi-convergence de la série  $\sum u_n$ .
3. Montrer que  $(\sum u_n)^2$  ne converge pas.
4. Soit  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\sigma(3p) = 2p, \sigma(3p+1) = 4p+1, \sigma(3p+2) = 4p+3$ . On admet que  $\sigma$  est une permutation de  $\mathbb{N}$ . Que dire de  $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$  ?

**Exercice 7 – (Comparaison)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ .

1. Déterminer un équivalent de  $I_n$ .
2. Nature de la série de terme général  $(I_n)^\alpha$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 8 – (Intégrale par éclatement)**

Soit  $\alpha > 0$ . Etudier la convergence de  $\int_1^\infty \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right) dt$ .

**Exercice 9 – (Une transformée)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^\infty \frac{e^{-nt} \ln(t)}{\sqrt{t}} dt$ .

1. Etudier la convergence de  $I_n$ .
2. Déterminer la limite de  $I_n$ .
3. Déterminer un équivalent de  $I_n$ .

**Exercice 10 – (Intégrabilité)**

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  une application continue de  $[a, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ , intégrable sur  $[a, +\infty[$ . Si  $f$  admet une limite en  $+\infty$ , que vaut-elle ?
2. Soit  $f$  de  $[0, +\infty[$  dans  $[0, +\infty[$  de classe  $C^1$  telle qu'il existe  $a < 0$  satisfaisant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a$ . Montrer que  $f$  et  $f'$  sont intégrables sur  $[0, +\infty[$ .

**Questions de cours**

- Enoncer les résultats sur les séries de Bertrand et démontrer le cas  $\alpha > 1$ .
- Montrer que  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \notin L^1(\mathbb{R}^{+*})$  mais que  $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}$  converge.
- Ensemble de définition de  $\Gamma$ , puis  $\Gamma(n)$ . Déterminer  $\Gamma(\frac{1}{2})$  par le calcul.