Exercice 1 – ***(Partie entière)***

Justifier l'existence et calculer $I = \int_0^{\infty} t\lfloor \frac{1}{t} \rfloor \mathrm{d}t$.

Exercice 2 – ***(Partie entière)***

Soit $\phi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de ϕ.
2. Démontrer que ϕ est monotone sur D.
3. Déterminer la limite de ϕ en $+\infty$

Exercice 3 – ***(Intégrale à paramètres, pour 5/2)***

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $M > 0$ telle que, pour tout $x > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{itx}-1|}{|x|}|f(t)|dt \leq M$

1. Montrer que $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Limite en 0^+ de $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}-1}{x} f(t)dt$

Exercice 4 – ***(Limite)***

Déterminer $\lim_{a\to\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 5 – ***(Comparaison)***

Soit $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer un équivalent de I_n.
2. Nature de la série de terme général $(I_n)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 – ***(Intégrale par éclatement)***

Soit $\alpha > 0$. Etudier la convergence de $\int_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right) \mathrm{d}t$.

Exercice 7 – ***(Une transformée)***

Soit $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-nt}ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Etudier la convergence de I_n.
2. Déterminer la limite de I_n.
3. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 8 – ***(Intégrabilité)***

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une application continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $[a, +\infty[$. Si f admet une limite en $+\infty$, que vaut-elle ?
2. Soit f de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ de classe C^1 telle qu'il existe $a < 0$ satisfaisant $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a$. Montrer que f et f' sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

Questions de cours

— Définition d'une tribu et d'une probabilité, propriétés (Enoncé)

— Montrer que $x \mapsto \frac{sin(x)}{x} \notin L^1(\mathbb{R}^{+*})$ mais que $\int_0^{\infty} \frac{sin(x)}{x}$ converge.

— Ensemble de définition de Γ, puis $\Gamma(n)$. Déterminer $\Gamma(\frac{1}{2})$ par le calcul.