Exercice 1 – ***(Tirage aléatoire)***

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $\dfrac{1}{2^n}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évenement "n est un multiple de k".

1. Vérifier qu'on définit bien une probabilité.
2. Déterminer la probabilité de l'évenenent A_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$
3. Déterminer la probabilité de l'évenenent $A_2 \cup A_3$.
4. Montrer que pour $p, q \geq 2$, A_p et A_q ne sont pas indépendants.

Exercice 2 – ***(Tricheur ?)***

Vous vivez dans un monde où l'on note x la proportion de tricheurs. Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ?

Exercice 3 – ***(Une variante de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev)***

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance et une variance, et on pose $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$. On fixe $\alpha > 0$.

1. Soit $\lambda \geq 0$. Démontrer que $\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda)$.
2. Montrer que $\forall \lambda \geq 0, \mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}$
3. En déduire que $\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$.
4. Démontrer que $\mathbb{P}(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$. A quelle condition a-t-on une "meilleure" inégalité que celle de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 4 – ***(Tribu image réciproque)***

Soit une application $f : \Omega \mapsto \Omega'$ et l'ensemble

$$\mathcal{T} = \left\{ A \subset \Omega \ \mid \ A = f^{-1}(f(A)) \right\}$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.

Exercice 5 – ***(Fonctions génératrices)***

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \Longleftrightarrow X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m$$

.

1. Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.
2. Déterminer la loi et la fonction génératrice de $S_m - S_{m-1}$, pour $m \geq 2$.
3. Déterminer la fonction génératrice de S_m, puis sa loi.

Indication : On admet que $\forall r \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1; 1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{k-r}$$

Exercice 6 – ***(Moments, pour 5/2)***

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Sous réserve d'existence, on appelle fonction génératrice des moments de X l'application :

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

1. Déterminer M_X si X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
2. On suppose que M_X est définie sur l'intervalle $]-a, a[, a > 0$. Montrer qu'elle est de classe C^∞ sur cet intervalle et que $\mathbb{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0)$.

Questions de cours

— Formule de sous additivité.

— Théorème de continuité croissance.

— Formule des probabilités totales.