Exercice 1 – ***(Tirage aléatoire)***

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $\dfrac{1}{2^n}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évenement "n est un multiple de k".

1. Vérifier qu'on définit bien une probabilité.
2. Déterminer la probabilité de l'évenenent A_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$
3. Déterminer la probabilité de l'évenenent $A_2 \cup A_3$.
4. Montrer que pour $p, q \geq 2$, A_p et A_q ne sont pas indépendants.

Exercice 2 – ***(Tricheur ?)***

Vous vivez dans un monde où l'on note x la proportion de tricheurs. Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ?

Exercice 3 – ***(Une variante de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev)***

Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance et une variance, et on pose $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$. On fixe $\alpha > 0$.

1. Soit $\lambda \geq 0$. Démontrer que $\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda)$.
2. Montrer que $\forall \lambda \geq 0, \mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}$
3. En déduire que $\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$.
4. Démontrer que $\mathbb{P}(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$. A quelle condition a-t-on une "meilleure" inégalité que celle de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 4 – ***(Suite exacte)***

Soit $(E_1, \ldots, E_k)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On dit qu'une suite d'applications linéaires

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \xrightarrow{f_n} \{0\} \tag{1}$$

est exacte si on a $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathrm{Im}(f_k) = \mathrm{Ker}(f_{k+1})$

1. Dans ce cas, montrer qu'on a la formule suivante (Euler-Poincaré) :
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$$

Exercice 5 – ***(Dimension paire)***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un endomorphisme f tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si n est pair.

Exercice 6 – ***(Commutant d'un endomorphisme nilpotent)***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$. Soit f un endomorphisme nilpotent d'ordre n (i.e. $\forall k < n, f^k \neq 0$ et $f^n = 0$). On appelle *commutant de* f l'ensemble :

$$\mathcal{C}(f) = \{\ g \in \mathcal{L}(E) \ \mid\ f \circ g = g \circ f\}$$

.

1. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Montrer que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E.
3. Soit $\phi_a : \mathcal{C}(f) \mapsto E$ définie par $\phi_a(g) = g(a)$. Montrer que ϕ_a est un isomorphisme.
4. En déduire que $\mathcal{C}(f) = \mathrm{Vect}(Id, f, \ldots, f^{n-1})$.

Questions de cours

— Formule de sous additivité.

— Théorème de continuité croissance.

— Formule des probabilités totales.