Exercice 1 – ***(Vandermonde)***

Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ des réels non nuls deux à deux distincts. On note $\mathbb{R}_n[X]^* = \{f : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$, où f est linéaire$\}$, le dual de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie.

1. Montrer que $V(a_0, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n+1} \end{vmatrix} = a_0 a_1 ... a_n \prod_{i>j}(a_i - a_j)$. Que dire de la valeur de ce déterminant ?

2. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. On note $F_j : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$ l'application définie par $F_j(P) = \int_0^{a_j} P(x)dx$. Montrer que $(F_0, F_1, ..., F_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

Exercice 2 – ***(Polynôme de matrice)***

Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Que vaut $P(M)$.
2. CNS pour que M soit diagonalisable.

Exercice 3 – ***(Intersection de deux spectres)***

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$

Exercice 4 – ***(Diagonalisation d'un endomorphisme)***

Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^tM$. ϕ est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 – ***(Sous-espaces stables)***
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. On appelle rotation du plan tout endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormée du plan s'écrit $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Réduire les rotations du plans.
2. Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par F si et seulement si u est un vecteur propre de f.
3. Montrer qu'il existe au moins deux sous espaces de E stables par f. Trouver un exemple d'endomorphisme (de $\mathbb{R}^2$) n'admettant que deux sous-espaces stables.
4. Montrer que si E est de dimension finie $n \geq 2$, et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins 3 sev stables si n est pair, et 4 si n est impair.

Exercice 6 – ***(Polynômes caractéristiques)***

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

1. Montrer le résultat dans le cas où $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. Conclure.

Questions de cours

— Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
— Existence d'un polynome annulateur d'un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie.
— Jordan.