Exercice 1 – ***(Vandermonde)***

Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ des réels non nuls deux à deux distincts. On note $\mathbb{R}_n[X]^* = \{f : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$, où f est linéaire$\}$, le dual de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie.

1. Montrer que $V(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n+1} \end{vmatrix} = a_0 a_1 ... a_n \prod_{i>j}(a_i - a_j)$. Que dire de la valeur de ce déterminant ?

2. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. On note $F_j : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$ l'application définie par $F_j(P) = \int_0^{a_j} P(x)dx$. Montrer que $(F_0, F_1, ..., F_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

Exercice 2 – ***(Polynôme de matrice)***

Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Que vaut $P(M)$.
2. CNS pour que M soit diagonalisable.

Exercice 3 – ***(Intersection de deux spectres)***

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$

Exercice 4 – ***(Diagonalisation d'un endomorphisme)***

Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^tM$. ϕ est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 – ***(Déterminant circulant)***
On considère la matrice J définie telle que

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
2. Application : Exprimer

$$w = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

Exercice 6 – ***(Polynômes caractéristiques)***

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

1. Montrer le résultat dans le cas où $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. Conclure.
4. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ \chi_{(AB)^p} = \chi_{(BA)^p}$

Exercice 7 – ***(Dans $\mathbb{C}$)***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que 0 est la seule valeur propre.

1. Montrer de deux façons différentes que $A^n = 0$
2. Calculer $\det(A + In)$.
3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ commutant avec A. Calculer $\det(A + M)$.
4. Inversement, quelles sont les matrices A telles que : $\forall M \in GL_n(\mathbb{C}), AM = MA \Leftrightarrow \det(A + M) = \det(M)$

Exercice 8 – ***(Nilpotence)***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit B une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{C})$. Que dire du spectre de B ?
2. Déterminer les polynômes P pour lesquels la matrice $P(A)$ est nilpotente.

Exercice 9 – ***(Convergence uniforme ?)***

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$.

1. Etudier la CVS.

2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et la limite de I_n. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.

3. Prouver la non CVU d'une autre façon.

Questions de cours

— Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.

— Existence d'un polynome annulateur d'un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie.

— $\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ & & P & \mapsto & (P(x_0), ..., P(x_n)) \end{array}$ est un isomorphisme. Conséquences (Lagrange).