Corrigés colle 11

Exercice 1 :

Soit R' rayon de $\sum a_n^2 z^n$.

* Soit $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ ACV donc

$a_n z^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $a_n^2 z^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Or, pour $|z| > R'$, $(a_n^2 z^n)_n$ n'est pas bornée

donc $|z|^2 \leq R'$ donc $R \leq \sqrt{R'}$

* Soit $|z| < \sqrt{R'}$ on a que $|z|^2 < R'$ et donc

que $|a_n^2 z^{2n}| \to 0$ d'où $|a_n z^n| \to 0$.

On en déduit que $|z| \leq R$ et donc $\sqrt{R'} \leq R$.

Exercice 2 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(a^n x)| \leqslant |x| |a^n|$, donc il y a convergence absolue de la série puisque $|a| < 1$

2) Soit $f_n(x) := \sin(a^n x)$. On a que $f_n \in C^\infty$ et que $\forall k, \quad \| f_n^{(k)} \|_\infty \leqslant |a|^{nk}$ qui est le terme général d'une série ACV

donc par théorème, $f \in C^\infty$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ |f^{(k)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{1-|a|^k} \leqslant \dfrac{1}{1-|a|}}$

3) Par Taylor-Laplace, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$

où $\displaystyle\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{1-|a|} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

(q2)

Ainsi, la série de Taylor CV sur $\mathbb{R}$ vers f donc $\boxed{f \text{ est DSE}}$

Exercice 3 : Cette intégrale est bien convergente (le vérifier rapidement)

On a de plus que, $\forall x \in]-1;1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$

Donc, $f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x+x^2)(1-x)} = \dfrac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

où a_n est tel que $\begin{cases} a_{3n} = 1 \\ a_{3n+1} = -1 \\ a_{3n+2} = 0 \end{cases}$

Donc en intégrant, $f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

avec $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) \right]_{-\infty}^{0}$

$$f(0) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

Donc, $\forall x, |x| < 1$, $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^n}$

$\boxed{\text{où } a_0 = 1 + \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}} \text{ et } \begin{cases} a_{3n} = 1 & (n \geq 1) \\ a_{3n+1} = -1 & (n \geq 0) \\ a_{3n+2} = 0 & (n \geq 0) \end{cases}}$

Exercice 4 : 1) $\binom{n+p}{p} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^p}{p!}$ donc $R = 1$.

2) $\forall x \in]-1,1[$, $f \in C^\infty$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+p}{p} n x^{n-1}$

Donc $(1-x) f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{n+p+1}{p} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n \binom{n+p}{p} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$

avec $d_n = (n+p+1) \binom{n+p}{p} - n \binom{n+p}{p} = (p+1) \binom{n+p}{p}$

Par suite, $(1-x) f'(x) = (p+1) f(x)$

Les solutions de l'équa. diff. $(1-x) y' = (p+1) y$ sont les

$$y(x) = \frac{C}{(1-x)^{p+1}}, \forall x \in]-1,1[, C \in \mathbb{R}.$$

Or, $f(0) = 1$, donc $\boxed{\forall x \in]-1;1[, \; f(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}}$

Exo 5 :

Posons $\forall n$, $b_n = \frac{a_n}{n!}$. On a donc que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1) b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} b_k \quad (*)$$

Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ et notons R son rayon.

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq 1$ et donc $R > 0$.

Donc, $\forall x \in]-R, R[$, on a que $S'(x) = S^2(x)$ par $(\star)$.

Les solutions de cette équa diff sont les $S(x) = \frac{C}{1-x}$, $C \in \mathbb{R}$

mais $S(0) = 1$, donc $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

On conclut donc que $\forall n$, $b_n = 1$, ie $\boxed{a_n = n!}$

Exercice 6 : $a_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(t))^n \, dt$

1) TCD : Soit $f_n(t) = (\tan(t))^n$.

* f_n est CPM sur $]0; \pi/4[$

* f_n CVS vers 0 sur $]0; \pi/4[$ car

$\forall t \in]0, \pi/4[, \quad \tan(t) < 1$

* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0; \pi/4[, \quad f_n(t) \leq 1 \in L^1(]0, \pi/4[)$

Conclusion : $a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ par CV dominée.

2) $\forall n, \; a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) + \tan^{n+2}(t) \, dt$

$= \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) \left(1 + \tan^2(t)\right) dt$

$= \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) \tan'(t) \, dt$

$(u^{n+1})' = (n+1) u^n u'$ $\quad = \left[\frac{\tan^{n+1}(t)}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$

donc, $\forall n$, $a_n + a_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$

3) Par 2), et monotonie, $\forall n$, $a_n + a_{n+2} \leq 2a_n \leq a_n + a_{n-2}$

donc $a_n \sim \dfrac{1}{2n}$

donc $U_n(x) = \dfrac{a_n}{n^\alpha} x^n \sim \dfrac{x^n}{2n^{\alpha+1}}$

$\boxed{\text{Rayon} = 1}$ ET au bord.

* si $x = 1$ $\sum U_n(x)$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 0$
* si $x = -1$ $\to$ $\sum U_n(x)$ DVG si $\alpha \leq -1$

$\to$ si $\alpha > -1$, $2\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k^\alpha} a_k = \alpha + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^2}{k^2} (a_k + a_{k+2}) + o(1)$

Or $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha (n+1)}$ CV par CSSA donc $\sum U_n(x)$ CV

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2}\, x^n + a_n x^n) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ (DSE)

d'où $\displaystyle f(x) + \frac{f(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}x}{x^2} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$

d'où

$$\boxed{f(x) = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}x - x\ln(1-x)}{1+x^2}}$$