Corrigés colle 12

Exercice 1 :

- f étant un automorphisme, $\dim(f(F)) = \dim F$ donc $f(F) = F$.

- Soit $y \in f(F^\perp)$, on peut écrire $y = f(x)$ où $x \in F^\perp$

Soit $v \in F$, on peut écrire $v = f(u)$ avec $u \in F$

On a alors $\langle y, v\rangle = \langle f(x), f(u)\rangle = \langle x, u\rangle = 0$

Ainsi, $f(F^\perp) \subset F^\perp$, puis $f(F^\perp) = F^\perp$ par égalité des dimensions

---

Exercice 2 :

1) le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est : $\langle .,. \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(A, B) \longrightarrow \mathrm{tr}(A^T B)$$

Vu les hypothèses, $\langle A, A^{-1}\rangle = \mathrm{tr}({}^tA A^{-1}) \overset{A \in S_n(\mathbb{R})}{=} \mathrm{tr}(A A^{-1}) = \mathrm{tr}(I_n) = n$

Par C-S, $|\langle A, A^{-1}\rangle| \leqslant \|A\| \, \|A^{-1}\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tA A)} \sqrt{\mathrm{tr}({}^tA^{-1} A^{-1})}$

$= \sqrt{\mathrm{tr}(A^2)} \sqrt{\mathrm{tr}(A^{-2})}$ car $A \in S_n(\mathbb{R})$

Or, A est semblable à A^{-1}, donc $\exists P \,/\, A = PA^{-1}P^{-1}$

donc $A^2 = P(A^{-1})^2P^{-1}$ d'où $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}((A^{-1})^2)$

Donc on a : $\boxed{\mathrm{tr}(A^2) \geqslant n}$

---

2) $\boxed{\Rightarrow}$ Pythagore

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|x+\lambda y\| \geqslant \|x\|$ alors $2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geqslant 0$

Supposons par l'absurde que $\langle x,y\rangle \neq 0$.

Alors $2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \underset{\lambda \to 0}{\sim} 2\lambda\langle x,y\rangle$ qui change

de signe autour de 0 ... CONTRADICTION, donc $\langle x,y\rangle = 0$

---

3) $\boxed{\subset}$ $\ker(A) \subset \ker({}^tAA)$

$\boxed{\supset}$ Soit $X \in \ker({}^tAA)$ alors ${}^tAAX = 0$ donc ${}^tX{}^tAAX = 0$

donc ${}^t(AX)AX = 0$ donc $\|AX\|^2 = 0$ donc $AX = 0$ ie $X \in \ker(A)$

donc au final, $\boxed{\ker(A) = \ker({}^tAA)}$

Par th du rang, $\dim(\ker(A)) + \mathrm{rg}(A) = n^2 = \dim(\ker({}^tAA)) + \mathrm{rg}({}^tAA)$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA)}$

Exercice 3 : 1) En notant $X = (x_1, \dots, x_n)$, on obtient,

$$ {}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} a_{ij} x_i x_j $$

Or, $$ \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} a_{ij} x_i x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j| $$

$$ \underset{C-S}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j| \Big)^2} $$

Or, $$ \Big(\sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j| \Big)^2 \underset{C-S}{\leq} \sum_{j\neq i} a_{ij}^2 \sum_{j\neq i} x_j^2 \leq \sum_{j\neq i} a_{ij} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 $$

D'où $$ \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} a_{ij} x_i x_j \right| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} a_{ij}^2 \Big) < \sum_{i=1}^{n} x_i^2 $$

D'où, $$ {}^tXAX > \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0 $$

2) Si $X \in \mathrm{Ker}(A)$, $AX = 0$ donc ${}^tXAX = 0$ et donc $X = 0$ par (1). Donc $\boxed{A \in GL_n(\mathbb{R})}$.

Exercice 4 :

1) $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P(X=j, Y=k) = 1 \iff a\sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 0} \frac{j+k}{2^{j+k}} = 1$

$\iff 2a \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq 0} \frac{j}{2^{j+k}} = 1 \iff 2a\left(\frac{1}{1-1/2}\right)\sum_{j\geq 0}\frac{j}{2^j} = 1$

$\iff 2a\sum_{j\geq 0}\frac{j}{2^{j-1}} = 1$

on a : $f(x) = \sum_{j\geq 0} x^j$ alors $f'(x) = \sum_{j\geq 0} j x^{j-1}$

i.e $\sum_{j\geq 0}\frac{j}{2^{j-1}} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4$ donc,

$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P(X=j, Y=k) = 1 \iff \boxed{a = \frac{1}{8}}$

---

2) Pour $j \in \mathbb{N}$, $P(X=j) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=j, Y=k) = \frac{j+1}{2^{j+2}}$

et pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X=j, Y=k) = \frac{k+1}{2^{k+2}}$

3) Les variables ne sont pas indépendantes car par exemple,

$$P(X=0) = \frac{1}{4} \; ; \; P(Y=0) = \frac{1}{4} \quad \text{mais } P(X=0, Y=0) = 0$$

---

4) Formule des probas totales,

$$P(X=Y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n, Y=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n+3}} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}$$

$$= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{1 - 1/4} \right)^2 = \frac{1}{16} \, \frac{16}{9} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

Exercice 5 :

1) S_1 suit une loi géométrique de param. p et

$$\boxed{G_{S_1}(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1}$ suit aussi une loi géométrique de param p. (On attend le "prochain" succès. Voir "loi sans mémoire" sur Wikipedia pour plus d'info sur cette theorie)

3) On peut écrire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} S_k - S_{k-1}$ avec $S_0 = 0$

Or, les variables de cette somme sont indep.

En effet, l'évènement

$$(S_1 - S_0 = n_1, S_2 - S_1 = n_2, \dots, S_n - S_{n-1} = n_n)$$

à la même proba que l'évènement

$$(X_{n_1} = X_{n_1+n_2} = \dots = X_{n_1+\dots+n_n} = 1) \cap (X_k = 0 \text{ sinon})$$

Or, les variables (X_k) sont indep.

On en déduit que $G_{S_m}(t) = \left(\frac{pt}{1-(1-p)t}\right)^m$.

Et puisque $G_{S_m}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} q^n p^m t^{n+m}$

on obtient que $\boxed{P(S_m = n) = \binom{n-1}{m-1} q^{n-m} p^n \quad \text{pour } n \geq m}$

Exercice 6 : 1) Soit $t \in \mathbb{R}$, par CVA, on a que

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{kt} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

2) Faisons deux cas :

* Si $X(\Omega)$ est fini. On écrit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

On peut developper en serie entière la fonction génératrice sur $\mathbb{R}$, donc

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{tx_k} P(X = x_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^{n} (x_k)^j P(X = x_k) t^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} E(X^j) t^j$$

* <u>Si $X(\Omega)$ est infini</u> Alors $X(\Omega) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$.

$$\forall t \in]-a;a[,\quad M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=x_n)\, e^{t x_n} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)$$

avec $U_n(t) = P(X=x_n)\, e^{t x_n}$.

Par hypothèse, la série CVS sur $]-a;a[$. les $U_n \in \mathcal{C}^\infty$ avec

$$\forall k,\quad U_n^{(k)}(t) = P(X=x_n)\, x_n^k\, e^{t x_n}$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha;\alpha] \subset]-a;a[$.

$\forall t \in [-\alpha;\alpha]$, on peut écrire que $|U_n^{(k)}(t)| \leq P(X=x_n)\,|x_n^k|\, e^{\alpha|x_n|}$

Soit $r \in]\alpha;a[$, on a que

$$P(X=x_n)\,|x_n|^k e^{\alpha|x_n|} = |x_n|^k e^{(\alpha-r)|x_n|}\, P(X=x_n)\, e^{r|x_n|}.$$

↳ La fonction $t \mapsto t^k e^{(\alpha-r)t} \in \mathcal{C}^0([0;+\infty[)$ et tend vers 0 en $+\infty$

Donc elle est borné par une constante M_k, i.e,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |x_n|^k e^{(\alpha-r)x_n} \leq M_k$$

$\hookrightarrow P(X=x_n)e^{r|x_n|} \leqslant P(X=x_n)e^{rx_n} + P(X=x_n)e^{-rx_n}$

La série M_X converge en $\pm r$ donc $\sum P(X=x_n)e^{r|x_n|}$ CV

Ainsi, la majoration uniforme $|u_n^{(k)}(t)| \leqslant M_k P(X=x_n)e^{r|x_n|}$

nous donne que $\sum u_n^{(k)}$ CVN sur $[-\alpha;\alpha]$.

$\Rightarrow$ On a donc que $M_X \in C^\infty(]-a;a[)$ et que.

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^k P(X=x_n) = E(X^k)$