Corrigés colle 13

Exos 1, 2, 5 : semaine précédente.

Exercice 3 : Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$,

On a que $\forall X$, ${}^tXAX = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ donc pour $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

on a que ${}^tX_0 A X_0 = \sum_{i,j} a_{ij}$

mais ${}^tX_0 A X_0 = \langle X_0, AX_0 \rangle \leq \|X_0\| \, \|AX_0\|$ par C-S.

or $\|X_0\| = \sqrt{n}$ et $\|AX_0\| = \|X_0\| = \sqrt{n}$ car $A \in O_n(\mathbb{R})$

Ainsi, $\boxed{\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n}$

Exercice 4 : 1) On a que $\|{}^tAX\|^2 = {}^tXA{}^tAX = \langle X, A{}^tAX\rangle$

d'où $\|{}^tAX\|^2 \underset{\text{C-S}}{\leqslant} \|X\| \, \|A{}^tAX\| \underset{\text{propriété de } A}{\leqslant} \|X\| \, \|{}^tAX\|$.

Si $\|{}^tAX\| \neq 0$, on a que $\|{}^tAX\| \leqslant \|X\|$

Si $\|{}^tAX\| = 0$, $0 \leqslant \|X\|$ donc le résultat est aussi vrai.

2) Si $AX = X$, alors $\|{}^tAX - X\|^2 = \|{}^tAX\|^2 + \|X\|^2 - 2\langle {}^tAX, X\rangle$

$$\leqslant 2(\|X\|^2 - {}^tXAX) = 0$$

On en déduit que $\boxed{{}^tAX = X}$

3) • Soit $X \in \ker(A - I_n) \cap \operatorname{Im}(A - I_n) = \{0\}$

alors $\begin{cases} AX = X \\ \exists Y / \; X = AY - Y \end{cases}$ donc $\|X\|^2 = \langle X, AY - Y\rangle$

$$= {}^tXAY - {}^tXY$$

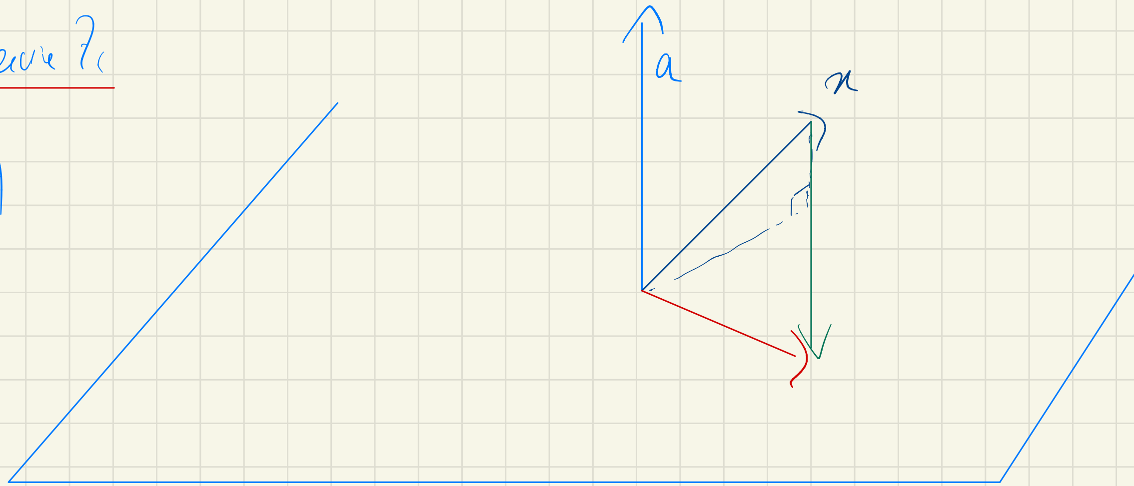
or ${}^tXAY = {}^t({}^tAX)Y = {}^tXY$, donc $\|X\|^2 = 0 \Rightarrow X = 0$.

• Par th du rang, $\dim(\ker(A - I_n)) + \operatorname{rg}(A - I_n) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$

donc, on en déduit que $\boxed{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n)}$

Exercice 7.

1)



$$h(x) = x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\|a\|^2}a.$$

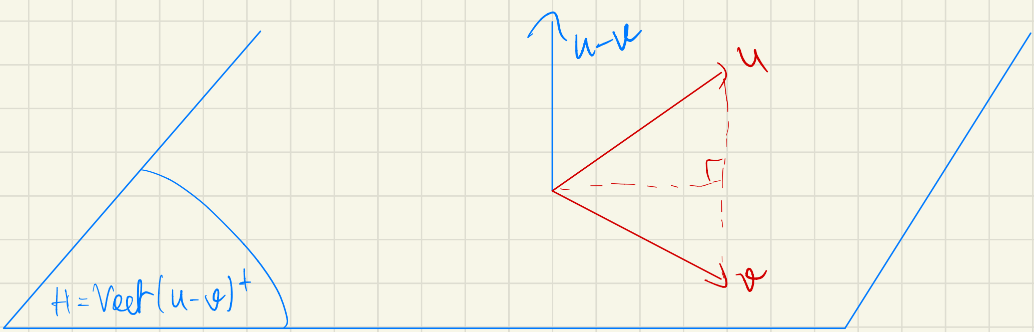
---

2) $\langle a, x\rangle a = (a^T x)\, a = a(a^T x) = (aa^T)x$

donc $h(x) = \left(I_n - 2\dfrac{aa^T}{\|a\|^2}\right) x$

---

3)



Analyse : Supposons que $\tilde{r}$ existe

D'après la question 1, $\tilde{r}$ est unique car $a = u - v \neq 0$.

Synthèse : Soit $\tilde{r}$ la reflexion p/r à $u - v \neq 0$.

Vérifions que $\tilde{r}(u) = v$.

$$\tilde{r}(u) = u - \frac{2}{\|u-v\|^2} \langle u-v, u \rangle (u-v)$$

$$= u - \frac{\langle u-v, 2u \rangle}{\|u-v\|^2} (u-v)$$

or $\langle u-v, 2u \rangle = \langle u-v, (u+v) + (u-v) \rangle$

$$= \|u-v\|^2 + \|u\|^2 - \|v\|^2$$

$$= \|u-v\|^2 \quad \text{car } \|u\| = \|v\|$$

donc $\tilde{r}(u) = u - (u-v) = v$.

4) Recurrence sur j.

<u>Init</u>: Première colonne. Soit u le premier vecteur colonne de A.

- Si u colinéaire à e_1, $H_1 = I_n$ convient.
- Sinon, $\exists h_1 / h_1(u) = v$, donc $\exists H_1 / v = H_1 u$ soit proportionnel à e_1.

Or v est le premier vecteur colonne de $A_1 = H_1 A$.

<u>Hérédité</u>: Colonne j.

Soit $j \in [\![1, n-2]\!]$, On suppose avoir construit $H_1, \dots, H_{j-1}$.

Donc les coeff sous-diagonaux des $j-1$ premières colonnes de A_{j-1} sont nulles.

- Si c'est le cas pour la j-ème colonne de A_{j-1}, on prend $H_j = I_n$ donc $A_j = A_{j-1}$
- Sinon, on sait que il existe $H_j / v = H_j u$, avec v combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_j$. De plus, H_j laisse invariant $e_1, \dots, e_{j-1}$ donc les $j-1$ premières colonnes de A_{j-1} restent inchangées.

Ainsi, $A_j = H_j A_{j-1}$ a des coefficients diagonaux nuls sur ses j premières colonnes.

---

5) La matrice $R = A_{n-1} = H_{n-1} \dots H_1 A \in T_n(\mathbb{R})$.

On remarque que $\forall j$, $H_j^{-1} = H_j$ car chaque H_j est orthogonale.

En posant $Q = H_1 \dots H_{n-1} \in O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$

On a donc
$$\begin{aligned} A &= (H_{n-1} \dots H_1)^{-1} R \\ &= (H_1^{-1} \dots H_{n-1}^{-1}) R \\ &= QR \end{aligned}$$

---

6) Il n'y a pas unicité, car si on reprend la récurrence, à chaque étape, on a 2 possibilités suivant le signe donné au j-ème coefficient de A_j !

Exercice 8 :

1) Soient $(P,Q) \in E$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t} \in \mathcal{C}^0([0;+\infty[)$

et $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où la bonne définition de $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

- $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est bilin, sym, positive (facile)
- Si $P \in E$ / $\langle P,P \rangle = 0$, alors $\int P^2(t)e^{-t}\,dt = 0$

  i.e $\forall t \in]0,+\infty[$, $P^2(t)e^{-t} = 0$ donc $P=0$ puisqu'il admet une infinité de racines.

---

2) $\forall k \geq 0$, $P_k \perp P_k'$ car $P_k' \in \text{Vect}(P_1, \dots, P_{k-1})$

Par IPP,

$$0 = \int_0^{\infty} P_k'(t)P_k(t)e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left[P_k(t)^2 e^{-t}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} P_k^2(t)e^{-t}\,dt.$$

d'où $P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1$

3) F est un hyperplan (noyau de la forme linéaire $P \mapsto P(0)$ non nulle)

Donc $F^\perp$ est une droite vectorielle. Notons Q / $F^\perp = \text{Vect}(Q)$

On peut écrire que $Q = \sum_{k=0}^{n} \langle P_k, Q \rangle P_k$.

Or, $\langle P_k, Q \rangle = \langle P_k - P_k(0), Q \rangle + P_k(0) \langle 1, Q \rangle$.

Mais $P_k - P_k(0) \in F$, donc $\langle P_k - P_k(0), Q \rangle = 0$

d'où $\boxed{Q = \lambda \sum_{k=0}^{n} P_k(0) P_k}$ où $\lambda = \langle 1, Q \rangle \neq 0$

---

4) $$\boxed{d(1,F) = \frac{|\langle 1, Q \rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} P_k(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}}$$

Enfin, par Pythagore, $\|1\|^2 = d(1,F)^2 + d(1,F^\perp)^2$

d'où, $$\boxed{d(1,F^\perp) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}}$$