Colles 8

Exercice 1 à 4 ; cf semaine dernière

Exercice 5 :

1) $$\chi_J(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \times \lambda^{n-1} + (-1)^{n+1} \times -1 \times (-1)^{n-1}$$

$$= \lambda^n - 1$$

ie J possède exactement n valeurs propres, qui sont les racines de χ_J i.e les racines n-ièmes de l'unité.

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!], \quad \lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

2) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$, et $\Delta = (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ telles que $J = P \Delta P^{-1}$

On remarque que si $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$ -

$$A = a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + \dots + a_{n-1} J^{n-1}$$

Donc $P^{-1} A P = a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_{n-1} D^{n-1}$

$$= \mathrm{diag}\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k \right) \right)_{0 \leq i \leq n-1}$$

d'où $w = \det(A) = \det(P^{-1} A P)$

$$\boxed{w = \prod_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k}$$

Exercice 6 :

. Q 1) 2) et 3) $\Rightarrow$ cf semaine précédente.

4) On a montré que $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{MN} = \chi_{NM}$

alors, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\chi_{(AB)^p} = \chi_{A (BA)^{p-1} B} = \chi_{BA (BA)^{p-1}} = \chi_{(BA)^p}$

Exercice 7 :

1) * $\chi_A(X) = X^n$ donc par Cayley-Hamilton,
on a : $A^n = 0$

* A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ donc semblable à

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$$

donc A^n est semblable à 0, donc $A^n = 0$.

2) On peut écrire $A = PTP^{-1}$

d'où $\det(A + I_n) = \det(P(T + I_n)P^{-1})$
$= \det(T + I_n) = 1$

3) $\det(A + M) = \det((AM^{-1} + I_n)M)$
$= \det(M)\det(AM^{-1} + I_n)$

Puisque $(AM^{-1})^n = A^n M^{-n} = 0_n$.

on a que 0 est valeur propre de AM^{-1} et c'est la seule (par trigonalisation).

Donc, par ce qui précède, $\boxed{\det(A+M) = \det(M)}$

4) Soit une telle matrice A.

Prenons $\forall \lambda \neq 0$, $M = \lambda I_n$,

alors, $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ ie 0 est la seule vap de A. (χ_A scindé dans $\mathbb{C}$ donc 0 est bien vap).

Donc on a l'équivalence.

Exercice 8 :

1) $\boxed{Sp(B) = \{0\}}$

En effet, X^n annule B donc $Sp(B) \subset \{0\}$

et dans $\mathbb{C}$, χ_B est scindé donc admet au moins une racine qui ne peut être que 0 (i.e. $0 \in Sp(B)$)

2) La matrice A se trigonalise. Elle est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)$ est semblable à $P(T)$ donc à :

$$P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

donc les $(P(\lambda_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont les valeurs propres de $P(A)$. i.e.

$P(A)$ est nilpotente $\iff \forall i,\ P(\lambda_i)=0$.

On peut donc écrire les polynômes qui vérifient ceci sous la forme :

$$\boxed{P(X) = Q(X)\prod_{\lambda\in sp(A)}(X-\lambda) \text{ où } Q\in\mathbb{C}[X]}$$

Exercice 9 :

1) Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$.

Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{2^n x}{n 2^n x^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

donc (f_n) CVS vers 0.

2) $I_n = \left[\dfrac{1}{2n} \ln(1 + 2^n n x^2) \right]_0^1 = \dfrac{1}{2n} \ln(1 + 2^n n)$

donc $I_n \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{\ln(2^n n)}{2n} = \dfrac{n\ln(2) + \ln(n)}{2n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ln(2)}{2}$

En supposant par l'absurde que (f_n) CVU sur $[0,1]$ vers 0, on aurait, d'après le TIL,

$$\frac{\ln(2)}{2} = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \lim_n f_n(t)\,dt = 0.$$

Absurde. Donc (f_n) ne CVU pas sur $[0,1]$.

3) Prenons $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, alors $f_n(x_n) = \dfrac{1}{1 + \frac{n}{2^n}} \underset{n}{\longrightarrow} 1$

Donc pour n assez grand, on a $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}$

et donc $\|f_n - 0\|_\infty \geq f_n(x_n) \geq 1/2$

ce qui montre que (f_n) ne CVU pas sur $[0,1]$.