Corrigés colle 9

Exercice 1 :

1) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \forall$ suite (x_n) telle que $(x_n) \to a$, alors $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \ell$

2) En posant $g_t \begin{cases} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto g\left(\frac{u}{t}\right) \mathbb{1}_{[0;ta]} \end{cases}$

On a que $g_t \in \mathcal{C}_{pm}([0;+\infty[)$, bornée car g est $\mathcal{C}^0$ sur un segment.

De plus $\int_0^a e^{-tx} g(x)\,dx = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} e^{-u} g_t(u)\,du$

3) Utilisons le critère séquentiel de la limite ainsi que le TCD.

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0;+\infty[$ telle que $t_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$

Posons $f_n : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$
$u \to e^{-u} g_{t_n}(u)$

- $\forall n, f_n \in \mathcal{C}_{pm}([0,+\infty[)$
- Soit $u \in [0,+\infty[$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N$, $u \leq t_n d$

Ainsi, $\forall n \geq N$, $f_n(u) = e^{-u} g\left(\frac{u}{t_n}\right)$

g étant continue en 0, $f_n(u) \xrightarrow{cvs} e^{-u} g(0) = f(u)$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [0,+\infty[$, $|f_n(u)| \leq e^{-u} \|g\|_\infty$

et $u \mapsto e^{-u} \|g\|_\infty \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Donc, le TCD donne que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} g_{t_n}(u)\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-u} g(0)\,du = g(0)$$

Ceci étant vrai pour toute suite (t_n) qui tend vers $+\infty$, alors $\int_0^{\infty} e^{-u} g_t(u)\,du \xrightarrow[t\to+\infty]{} g(0)$ par 1) con $g(0) \neq 0$.

Ainsi,
$$\lim_{t\to\infty} \left(\int_0^d e^{-tx} g(x)\,dx \, \frac{t}{g(0)} \right)$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} g_t(u)\,du \right) \times \frac{1}{g(0)} = 1$$

donc
$$\int_0^d e^{-tx} g(x)\,dx \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}$$

Exercice 2 :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$, $x \in [0,1]$.

1). $U_n(1) = 0$ donc $\sum U_n(1)$ CV

. $\forall x \in [0,1[$, $U_n(x) \leq a_0 x^n$

Or $\sum a_0 x^n$ CV pour $x \in [0,1[$

Donc $\sum U_n(x)$ CVS sur $[0,1]$

2) $\forall x$, $U_n'(x) = a_n \left(n x^{n-1} (1-x) - x^n \right)$

$= a_n \left(n x^{n-1} - (n+1) x^n \right)$

$\Rightarrow$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$U_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$U_n(x)$	a_n	$\nearrow$		$\searrow$	0

Donc $\|U_n\|_\infty = a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{a_n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$

Donc $\|U_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a_n}{en}$ (faire le DL si difficulté)

donc $\boxed{\sum \|U_n\|_\infty \iff \sum \frac{a_n}{n} \ CV}$ car les séries sont à termes positifs

---

3) $\boxed{\Leftarrow}$ Il faut regarder le reste : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x)$

Donc, $\forall x \in [0,1[$, $0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1} \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k (1-x)}_{= x^{n+1}}$

$\leq a_{n+1}$

Et $R_n(1) = 0$.

Donc $\boxed{\text{si } a_n \to 0, \ \sum U_n \ CVU}$ (majoration uniforme du reste)

$\boxed{\Rightarrow}$ Comme (a_n) est positive est décroissante, elle admet une limite $\ell \geq 0$.

Donc, $\forall x \in [0,1[$, $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} \ell x^k (1-x) = \ell x^{n+1} \geq 0$.

Donc $\forall x \in [0,1[$, $\ell x^{n+1} \leq \|R_n\|_\infty$

On fait tendre x vers 1^-, et donc

$0 \leq \ell \leq \|R_n\|_\infty$

$$\boxed{\text{Nécessairement } \ell = 0, \text{ sinon cela contredit la convergence uniforme de } U_n \text{ (i.e. la CV de } \|R_n\|_\infty \text{ vers } 0).}$$

Exercice 3 : Cf semaine dernière.

Exercice 4 :

1) $\forall x \in]0,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = -\dfrac{x^2 \ln(x)}{1+x^2}$ (somme géométrique)

La relation marche toujours pour $x=0$ et $x=1$, donc

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) = -\frac{x^2 \ln(x)}{1+x^2}}$$

2) L'idée est d'appliquer le TSSA à n fixé.

On a donc une majoration du reste :

Soit $x \in [0, 1)$,

* $|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln(x) \right| \leqslant x^{2(n+2)} |\ln(x)|$

Soit $\varphi : x \mapsto x^{(2n+2)} |\ln(x)| = -x^{2n+2} \ln(x)$ sur $[0,1]$

$\forall x \in]0,1]$, $\varphi'(x) = -(2n+2)x^{2n+1}\ln(x) - x^{2n+1}$

$= -x^{2n+1}\left((2n+2)\ln(x) + 1\right)$

x	0		$e^{-\frac{1}{(2n+2)}}$		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	↗	M	↘	0

où $M = \dfrac{e^{-1}}{2n+2}$

Donc, $\forall x \in [0,1)$, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{e^{-1}}{2n+2}$

donc $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ D'où la CVU sur $[0,1]$

3) On a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \ln(x)\,dx - \int_0^1 \frac{x^2\ln(x)}{1+x^2}\,dx.$

$$+x^2\ln(x)$$
$$-x^2\ln(x)$$

On reconnait le terme voulu sur la dernière intégrale.

En effet, on a montrer la CVU de $\sum(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln(x)$.

On peut donc intégrer termes à termes.

$$U_n(x) = (-1)^{n+1}\,x^{2n}\;x^2\ln(x)$$

Et, $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(x^2)^n = -\frac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} = -1 + \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)\,dx$$

$$\overset{\text{ITT}}{=} -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 U_n(x)\,dx$$

Or, $\int_0^1 U_n(x)\,dx = (-1)^{n+1}\int_0^1 x^{(2n+2)}\ln(x)\,dx$

$$= (-1)^{n+1}\left(\left[\frac{x^{(2n+3)}\ln(x)}{(2n+3)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(2n+3)}dx\right)$$

$$= (-1)^n\left[\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)^2}\right]_0^1$$

D'où $\int_0^1 U_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$

$$= -1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 5 :

1) φ_h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. En effet,

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [kh, (k+1)h[, \quad \varphi_h(t) = f(kh),$

Donc φ_h est continue (car constante) sur $]kh ; (k+1)h[$.

De plus, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} \lim\limits_{t \to (kh)^+} \varphi_h(t) = \varphi_h(kh) = f(kh) \\ \lim\limits_{t \to (kh)^-} \varphi_h(t) = \varphi_h((k-1)h) = f((k-1)h) \end{cases}$

On a donc des limites à gauche et à droite finies aux points de discontinuité.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_0^{nh} \varphi_h(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \varphi_h(t)\,dt$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} h f(kh)$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} S(h)$$

De plus, $\varphi_h \in L^1(\mathbb{R}_+)$ car

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |\varphi_h(t)| = \left| f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h \right) \right| \leqslant \underbrace{\frac{C}{1 + \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor^2 h^2}}_{\underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{C}{t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+)}$$

On peut donc écrire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{nh} \varphi_h(t)\,dt = S(h)$

---

2) Si $h \in]0,1]$ et $t \in [1, +\infty[$, alors

$$\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h \geqslant \left(\frac{t}{h} - 1 \right) h \geqslant t - h \geqslant t - 1 \geqslant 0.$$

Donc $\displaystyle |\varphi_h(t)| \leqslant \frac{C}{1 + (t-1)^2}$

---

3) Astuce importante : On utilise le critère séquentiel combiné au TCD.

Soit (h_n) une suite de réels strt positifs qui tend vers 0.

Si on montre que $S(h_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{\infty} f(t)\,dt$ par TCD,

on en déduira que $\lim\limits_{h\to 0} S(h) = \int_0^{\infty} f(t)\,dt$ par critère

séquentiel. Comme $(h_n) \to 0$, on peut supposer que

$h_n \in]0;1]$ (c'est vrai APCR ...)

$\Rightarrow$ TCD :

* $\forall n$, φ_{h_n} sont CPM sur $\mathbb{R}_+$ (cf q 1))

* $\forall n$, $t - h_n = \left(\frac{t}{h_n} - 1\right) h_n \leq \left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n \leq \frac{t}{h_n} h_n = t$

donc $\left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$ par th. des gendarmes.

Ainsi, par continuité de f : $\varphi_{h_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$

On a donc CVS de $(\varphi_{h_n})_n$ vers f sur $\mathbb{R}_+$.

$\bullet$ $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \ |\varphi_{h_n}(t)| \leq C$ et avec la question précédente, on a en fait que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\varphi_{h_n}(t)| \leq \alpha(t) = \begin{cases} C & \text{si } t \in [0,1] \\ \dfrac{C}{1+(t-1)^2} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

où $\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+)$ (et est continue).

On applique donc le TCD :

$$\boxed{S(h) \xrightarrow[h \to 0]{} \int_0^{\infty} f(t)\,dt}$$

Exercice 6 : $a_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(t))^n \, dt$

1) TCD : Soit $f_n(t) = (\tan(t))^n$.

* f_n est CPM sur $]0; \pi/4[$

* f_n CVS vers 0 sur $]0; \pi/4[$ car

$\forall t \in]0; \pi/4[, \quad \tan(t) < 1$

* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0; \pi/4[, \quad f_n(t) \leqslant 1 \in L^1(]0; \pi/4[)$

Conclusion : $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ par CV dominée.

2) $\forall n, \; a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) + \tan^{n+2}(t) \, dt$

$= \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) \left(1 + \tan^2(t)\right) dt$

$= \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) \tan'(t) \, dt$

$(u^{n+1})' = (n+1) u^n u'$ $\quad = \left[\frac{\tan^{n+1}(t)}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$

donc, $\forall n$, $a_n + a_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$

3) Par 2), et monotonie, $\forall n$, $a_n + a_{n+2} \leq 2a_n \leq a_n + a_{n-2}$

donc $a_n \sim \dfrac{1}{2n}$

donc $U_n(x) = \dfrac{a_n}{n^\alpha} x^n \sim \dfrac{x^n}{2n^{\alpha+1}}$

$\boxed{\text{Rayon} = 1}$ ET au bord.

* si $x = 1$: $\sum U_n(x)$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 0$
* si $x = -1$ ↳ $\sum U_n(x)$ DVG si $\alpha \leq -1$

↳ si $\alpha > -1$, $2\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k^\alpha} a_k = \alpha + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k^\alpha}(a_k + a_{k+2}) + o(1)$

Or $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha (n+1)}$ CV par CSSA donc $\sum U_n(x)$ CV

4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_{n+2}\, x^n + a_n x^n\right) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ (DSE)

d'où $f(x) + \dfrac{f(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}x}{x^2} = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

d'où

$$\boxed{f(x) = \dfrac{\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}x - x\ln(1-x)}{1+x^2}}$$