Corrigés colle 18

Exercice 1 et 2 : Cf semaine dernière.

Exercice 3 :

1) C'est immédiat

2) D'un part, $\forall t$, $w(t) = y_1(t)\,y_2'(t) - y_1'(t)\,y_2(t)$

On a envie de dériver ce wronskien :

$$\forall t,\ w'(t) = y_1'(t)\,y_2'(t) + y_1(t)\,y_2''(t) - y_1''(t)\,y_2(t) - y_1'(t)\,y_2'(t)$$
$$= y_1(t)\,y_2''(t) - y_1''(t)\,y_2(t)$$

Donc, $\forall t$,
$$t w'(t) = y_1(t)\Big((2t-1)y_2'(t) + (1-t)y_2(t)\Big)$$
$$- y_2(t)\Big((2t-1)\,y_1'(t) + (1-t)y_1(t)\Big)$$
$$= (2t-1)\Big(y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)\,y_2(t)\Big)$$
$$= (2t-1)\,w(t)$$

d'où $\forall t$, $t w'(t) + (1-2t)w(t) = 0$

Donc le wronskien vérifie une équa diff

Ainsi, $\forall t$, $w(t) = \lambda \dfrac{e^{2t}}{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) φ étant solution de (E), on dispose d'une autre solution ψ de (E), indep de φ.
En effet, on dispose de l'existence de ψ (notion de système fondamental de solutions).

Prenons $w(t) = \dfrac{e^{2t}}{t}$ $(\lambda = 1)$.

$A e^{t}$

Alors, $\varphi \psi' - \psi \varphi' = w$

donc $e^{t} \psi'(t) - e^{t} \psi(t) = w$

donc $\psi'(t) - \psi(t) = \dfrac{e^{t}}{t}$

donc $\psi(t) = \ln(t) e^{t}$ après résolution.

Ainsi, la solution générale de (E) s'écrit

$$\boxed{y(t) = (\lambda \ln(t) + \mu) e^t \quad \text{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 4 :

1) Eq homogène : $y_H(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$

Solut° particulière : On cherche $y_p(t) = \alpha \cos(nt)$, si $n \neq 1$

- Si $n \neq 1$; $\alpha = \frac{-1}{n^2 - 1}$ i.e $y_p(t) = -\frac{1}{n^2-1} \cos(nt)$

donc $y(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) + \frac{1}{1-n^2} \cos(nt)$

- Si $n = 1$: Variation de la constante.

$$\begin{cases} \lambda'(t) \cos(t) + \mu'(t) \sin(t) = 0 \\ -\lambda'(t) \sin(t) + \mu'(t) \cos(t) = \cos(t) \end{cases}$$

Résolution : On multiplie la première par sin, la dernière par cos

$$\Rightarrow \mu'(t)\left[\sin^2(t)+\cos^2(t)\right] = \cos^2(t)$$

$$\Rightarrow \mu'(t) = \cos^2(t) \quad \text{et} \quad \lambda'(t) = -\sin(t)\cos(t)$$

Donc, $\begin{cases} \lambda(t) = -\frac{1}{2}\sin^2(t) \\ \mu(t) = \frac{t}{2} + \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} \end{cases}$

On obtient donc $y_p(t) = \frac{t}{2}\sin(t)$

d'où $\boxed{y(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) + \frac{1}{2}t\sin(t)}$

2) Soit $f(t) = a_0 + \frac{a_1}{2} t \sin(t) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{1-n^2} \cos(nt)$

Comme il a CVN de la serie $\sum \left(\frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)\right)''$

et CVS des series $\sum \left(\frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)\right)'$ et $\sum \frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)$

Alors on peut deriver deux fois terms à terms sans problems.

On se rend compt que $f''(t) + f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt)$

Donc une solution générale est :

$$\boxed{y(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) + f(t)}$$

Exercice 5

1) Sur $]0,1[\cup]1;+\infty[$, la méthode de la variation de la constante donne que

$$\boxed{y(x) = \frac{x+\lambda}{\ln(x)} \quad , \lambda \in \mathbb{R}.}$$

2) g est $\mathcal{C}^\infty([1/2;+\infty[)$

$\forall x \in]-1;1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

donc $\forall x \in]-1;1[\setminus \{0\}$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^n$

qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[\setminus \{0\}$. (série entière).

Si on pose $g(0) = 1$, on a prolongé g en une fonction DSE sur $]-1;1[$, donc $\mathcal{C}^\infty(]-1;1[)$

le prolongement est donc $\boxed{\text{aussi } \mathcal{C}^\infty(]-1;+\infty[)}$.

3) g est à valeurs strictement positives sur $]-1;+\infty[$

Posons $f(x) = \dfrac{1}{g(x-1)}$ (bien définie sur $]0;+\infty[$)

On a bien que $f \in C^\infty(]0;+\infty[)$

et que f est solut° de (E) sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

L'equa diff est aussi vérifiée en 1, donc on a notre solution de (E) qui est $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 6 :

Analyse : Soit u une fonction solution.

Posons $U(x) = \int_0^x u(t)\,dt$.

On a que $U \in C^1$ et que $\begin{cases} U(0) = 0 \\ U'(x) = \lambda U(x) + f(x) \end{cases}$

donc $U(x) = Ce^{-\lambda x} + \left(\int_0^x f(t) e^{\lambda t}\,dt\right) e^{-\lambda x}$

et $U(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

donc $U(x) = \left(\int_0^x f(t) e^{\lambda t}\,dt\right) e^{-\lambda x}$

On en déduit que $u(x) = f(x) - \lambda \int_0^x f(t) e^{\lambda(t-x)}\,dt$

(en dérivant)

Synthèse : Une telle fonction u est solution

car sa primitive U s'annulant en 0 vérifie

$$U' = \lambda U + f.$$