Corrigés Colle 1

Exercice 1 :

1) $\forall a, b, \quad 2ab \leqslant a^2 + b^2 \quad (\text{cf } (a-b)^2 \geqslant 0)$

donc, $\forall n, \quad \sqrt{u_n u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$

or $\sum u_n$ et $\sum u_{n+1}$ CV donc $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ CV par comparaison

2) $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall n, \quad \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} u_{2k} + u_{2k+1}$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad (\text{car } u_n \geqslant 0)$$

Ainsi, v_n est une suite positive dont les sommes partielles sont majorées, donc $\boxed{\sum v_n \text{ CV}}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall n, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ donc pour les mêmes raisons, $\boxed{\sum u_n \text{ CV}}$

Exercice 2 :

1) . $u_0 \in]0; \frac{\pi}{2}]$. Si $\forall n \geq 0$, $u_n \in]0; \pi/2]$ alors $u_{n+1} \in]0, 1] \subset]0, \pi/2]$. Par rec, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \pi/2]$

. Soit $f : [0; \pi/2] \to \mathbb{R}$
$x \to x - \sin(x)$

f est dérivable sur $[0, \pi/2]$ et $\forall x \in [0, \pi/2]$, $f'(x) = 1 - \cos(x)$

donc $f' > 0$ sur $]0; \pi/2]$ et donc f st $\nearrow$ sur $]0; \pi/2]$.

Ainsi, $\forall x \in]0, \pi/2]$, $f(x) > f(0) = 0$.

Donc $\forall x \in]0; \pi/2]$, $\sin(x) < x$ ie $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$

. (u_n) étant minorée par 0, elle converge.

Soit $\ell = \lim_{n \to \infty} u_n$ alors, $\sin(\ell) = \ell \Rightarrow \ell = 0$ car $\forall x \in]0, \pi/2]$, $\sin(x) \neq x$.

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive, décroissante, de limite nulle.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $v_n = {u_{n+1}}^\alpha - {u_n}^\alpha$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (\sin(u_n))^\alpha - {u_n}^\alpha$ (car $u_n \to 0$)

$$= \left(u_n - \frac{{u_n}^3}{6} + o({u_n}^3)\right)^\alpha - {u_n}^\alpha$$

$$= {u_n}^\alpha \left(1 - \frac{{u_n}^2}{6} + o({u_n}^2)\right)^\alpha - {u_n}^\alpha$$

$$= {u_n}^\alpha \left(1 - \frac{\alpha {u_n}^2}{6} + o({u_n}^2)\right) - {u_n}^\alpha$$

$$v_n = -\frac{\alpha}{6} {u_n}^{\alpha+2} + o({u_n}^{\alpha+2})$$

Avec $\alpha = -2$, on a que $v_n = +\frac{1}{3} + o(1)$ donc $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\frac{1}{3}$

3) Ainsi, $\frac{1}{{u_{n+1}}^2} - \frac{1}{{u_n}^2} = +\frac{1}{3} + o(1)$

le lemme de Cesaro donne que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \longrightarrow +\frac{1}{3}$

Ainsi $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{{u_{k+1}}^2} - \frac{1}{{u_k}^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{{u_n}^2} - \frac{1}{{u_0}^2}\right) \longrightarrow \frac{1}{3}$

donc $n{u_n}^2 \sim 3$ d'où $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}$

3) $\begin{cases} \forall n,\ U_n \geq 0,\ \sqrt{\frac{3}{n}} \geq 0 \\ \sum \sqrt{\frac{3}{n}}\ DV \\ U_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} U_n\ DV$

Exercice 3 :

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha u_k$.

(u_n) décroissante

$\downarrow$

On a : $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_{2n} = n^{\alpha+1} u_{2n} \geqslant 0$

Comme (S_n) converge, on a que $S_{2n} - S_n \to 0$ donc

que $n^{\alpha+1} u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais aussi que $(2n)^{\alpha+1} u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

On peut faire de même pour (S_{2n+1}) ou remarquer que

$$0 \leqslant (2n+1)^{\alpha+1} u_{2n+1} \leqslant \frac{(2n+1)^{\alpha+1}}{(2n)^{\alpha+1}} (2n)^{\alpha+1} u_{2n}$$

et donc parvenir à $(2n+1)^{\alpha+1} u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

On conclut donc que $\boxed{n^{\alpha+1} u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

Exercice 4 :

1)
$$\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+(-1)^n\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n}\ \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$\underset{n\to\infty}{=} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{CV (CSSA)}} - \underbrace{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sim\frac{1}{n}\text{ donc DV}}$$

Donc $\boxed{\text{la serie DV.}}$

2)
$$\frac{(-1)^n\sin(n)}{n+(-1)^n\sin(n)} = \frac{(-1)^n\sin(n)}{n}\ \frac{1}{1+\frac{(-1)^n\sin(n)}{n}}$$

$$\underset{n\to\infty}{=} \frac{(-1)^n\sin(n)}{n}\left(1-\frac{(-1)^n\sin(n)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\underset{n\to\infty}{=} \frac{(-1)^n\sin(n)}{n} \underbrace{-\frac{\sin^2(n)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\text{ donc CVA}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, Posons $u_n = \frac{(-1)^n e^{in}}{n}$

u_n est le produit d'une $\overbrace{\text{suite décroissante positive convergent vers } 0}^{1/n}$

et d'une suite à somme partielle bornée $\Rightarrow$ Abel

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(k)$.

$\forall n \geqslant 1$, $|S_n| = \left| \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k e^{ik} \right) \right|$

$\leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k e^{ik} \right|$ car $\forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$

$\leqslant \left| e^{i} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{in}}{1 + e^{i}} \right|$

$\leqslant \frac{1}{\cos(1/2)}$

Donc $\forall n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \sin(k)}{k} = -\sin(1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k}$

$= -\sin(1) - \sum_{k=2}^{n} \frac{S_{k-1}}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k}{k}$

$= -\sin(1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k}{k}$

$= -\sin(1) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_n}{n} - \frac{S_1}{2}$

$= \frac{-\sin(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} - \frac{S_n}{n}$

Comme $(S_n)_{n\geq 1}$ est bornée, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{S_n}{n(n+1)}$ CV donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}$ CV

Donc $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n+(-1)^n \sin(n)} \quad \text{CV}}$

Exercice 5 :

Soit $a>0$, on pose $S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{a}{n^2+a^2}}^{U_n(a)}$

D'abord, on a que $\begin{cases} U_n(a) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a}{n^2} \\ \sum_{n\geq 0} \frac{a}{n^2} \text{ CV} \\ \forall n, \frac{a}{n^2} \geq 0 \text{ et } U_n(a) \geq 0 \end{cases}$ donc $\sum U_n(a)$ CV

Par décroissance de $x \mapsto \frac{a}{a^2+x^2}$ sur $[0;+\infty[$, on a que

$$\forall N, \quad \int_1^{N+1} \frac{a}{a^2+x^2}\,dx \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{a^2+n^2} \leq \int_0^N \frac{a}{a^2+x^2}\,dx$$

d'où $\arctan\left(\frac{N+1}{a}\right) - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{a^2+n^2} \leq \arctan\left(\frac{N}{a}\right)$

et si $N \to \infty$, on a, $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq S(a) \leq \pi/2$

donc $\boxed{S(a) \xrightarrow[a\to\infty]{} \frac{\pi}{2} \text{ par th. des gendarmes}}$

Exercice 6 :

1) On passe au log : Soit $W_n = \ln(v_n)$

$$W_n = \sum_{q=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}\right) = \sum_{q=2}^{n}\left(\frac{(-1)^q}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2q} + O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right)\right)$$

Or, $\begin{cases} \displaystyle\sum_{q=2}^{n} \frac{(-1)^q}{q} \text{ CV (série alternée)} \\ \displaystyle\sum_{q=2}^{n} O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right) \text{ CV (CV absolue + comparaison)} \end{cases}$

De plus, $\displaystyle\sum_{q=2}^{n} \frac{1}{q} = \ln(n) + \lambda + o(1)$ (exo classique : comparaison série intégrale)

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

donc $\ln(v_n) = -\frac{1}{2}\ln(n) + \alpha + o(1)$

d'où $v_n = \frac{e^{\alpha}}{n^{1/2}} e^{o(1)}$ donc $v_n \sim \frac{e^{\alpha}}{\sqrt{n}}$.

On a donc que $\boxed{\sum v_n \text{ diverge}}$

2) . Critère des séries alternées

. Pas de CVA car $\sum \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

3) Soit $c_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$

On a que $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$

Soit $f(x) = (x+1)(n+1-x)$ et $f'(x) = n - 2x$

Donc f atteint sont max en $\frac{n}{2}$ sur $[0;n]$ et donc,

$\forall k \in [\![0;n]\!], \quad \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \geq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}}$

Ainsi, $\forall n \geq 1$, $|c_n| \geq \frac{n}{\sqrt{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)}} \geq C > 0$

cste.

donc $c_n \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$ donc le produit de Cauchy ne CV pas.

4) Posons $z_n = u_{\sigma(3n)} + u_{\sigma(3n+1)} + u_{\sigma(3n+2)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{4n+2}} - \frac{1}{\sqrt{4n+4}}$$

Un calcul simple montre qu'il existe $C < 0$ tq

$$z_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$$

Mais comme $\sum_{n=1}^{N} z_n = \sum_{n=3}^{3N+2} u_{\sigma(n)}$

on a que $\boxed{\sum u_{\sigma(n)} \text{ DV}}$

Exercice 7.

1) Intégrale de Wallis :

- mq $\forall n \geqslant 1$, $n I_n = (n-1) I_{n-2}$.
- mq $U_n = n I_{n-1} I_n$ est constante et vaut $\frac{\pi}{2}$.
- mq $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$
- mq $I_n I_{n+1} \leqslant I_n^2 \leqslant I_{n-1} I_n$
- En déduire $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

2) $$I_n^{\alpha} \sim \frac{\pi^{\alpha/2}}{2^{\alpha/2} n^{\alpha/2}}$$

donc $\boxed{\sum (I_n)^{\alpha} \text{ CV ssi } \alpha > 2}$