Corrigés colle 15

Exercice 1 :

1) La sphère $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_2 = 1\}$ de centre 0 et de rayon 1 est un fermé borné de l'ev. $\mathbb{R}^n$, de dim finie.

Donc si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x \mapsto Ax$ est continue sur S et est donc bornée et atteint ses bornes.

Donc $\boxed{|||A||| \text{ existe.}}$

---

2) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Elle est diagonalisable (symétrique réelle).

Notons $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ où les $(\lambda_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ sont les vap de A.

Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\|DX\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \leq \rho(D) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \rho(D) \|X\|_2^2$$

De plus, si λ_0 est une vap de D tq $|\lambda_0| = \rho(D)$ et X_0 le vep associé, alors,

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda| \|X_0\|_2 = \rho(D) \|X_0\|_2$$

Donc on a mq (i) $\forall X, \dfrac{\|DX\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \rho(D)$

$$(ii)\ \exists X_0 \ / \ \frac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2} = \rho(D)$$

Donc au final, $|||D||| = \rho(D)$

Or, $\forall X$, $\|AX\|_2 = \|PD\,{}^tP\,X\|_2 = \|D\,{}^tPX\|_2$

$P \in O_n(\mathbb{R})$ (ie $\forall Y \ \|PY\| = \|Y\|$)

En posant $X' = {}^tPX$ on se rend compte que $\|X'\|_2 = \|{}^tPX\|_2 = \|X\|_2$

Ce qui veut dire que

$$\left\{ \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathcal{M}_{n,1} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ \frac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2},\ X' \in \mathcal{M}_{n,1} \setminus \{0\} \right\}$$

donc $|||A||| = |||D|||$ et $\rho(A) = \rho(D)$ (même vap)

donc $\boxed{|||A||| = \rho(A)}$

Exercice 2 :

1) Soient $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ appartenant à $f(C)$

On peut supposer que $y_1 \leq y_2$. Soit $y \in [y_1 ; y_2]$

Soit $g : [0;1] \to \mathbb{R}$
$t \to f((1-t)x_1 + t x_2)$.

On a que g est bien définie car C est convexe.
g est continue et $\begin{cases} g(0) = f(x_1) = y_1 \\ g(1) = f(x_2) = y_2 \end{cases}$

D'après le TVI sur g, $\exists t_0 \in [0;1] \,/\, g(t_0) = y$.

Posons $x = (1-t_0)x_1 + t_0 x_2 \in C$. On a alors que $f(x) = y \in f(C)$
donc $f(C)$ est un intervalle.

2) Posons $C = \{(x,y) \in I / x > y\}$

et $f : C \longmapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = h(x) - h(y)$.

D'abord, C est convexe. (facile à montrer)

D'après 1), $f(C)$ est un intervalle. De plus, $0 \notin f(C)$ car h est injective.

On a donc deux possibilités : • $f > 0$

• $f < 0$.

↳ Si $f > 0$, alors h est stt ↗

↳ Si $f < 0$, alors h est stt ↘

Donc h est stt monotone.

Exercice 3 :

1) Soit $f \in E$ et $\begin{cases} \phi(f) = f(0) \\ \psi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt \end{cases}$. ϕ et ψ sont deux formes linéaires.

Elles sont continues car, $\forall f \in E$,

$$|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty$$

$$|\psi(f)| \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \|f\|_\infty$$

De plus $A = \phi^{-1}(\{0\}) \cap \psi^{-1}(\{0\})$

A est donc une intersection de fermés, puisque ce sont des images réciproque de $\{0\}$ (fermé) par des applications continues.

$\boxed{\text{Donc } A \text{ est un fermé de } (E, \|.\|_\infty)}$

---

2) • O ouvert de $(E, \|.\|_\infty)$.

Soit $f \in E$, posons $r = f(1)$. Alors, $B_\infty(f,r) \subset O$.

En effet, $\forall g \in B_\infty(f,r)$,

$$g(1) \geq f(1) + g(1) - f(1) \geq f(1) + \|g-f\|_\infty \geq f(1) - f(1) \geq 0.$$

Donc $g \in O$.

• $\mathcal{O}$ pas ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$.

Soit $f \in \mathcal{O}$ et $r > 0$.

Posons $g_n = f - f(1)x^n$, $\forall n \geq 1$.

Alors, $\|g_n - f\|_1 = f(1) \int_0^1 x^n dx = \dfrac{f(1)}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Donc pour n assez grand, $g_n \in B_\infty(f, r)$.

Par contre, $\forall n$, $g_n \notin \mathcal{O}$ car $g_n(1) = f(1) - f(1) = 0$.

37. $O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, A\,{}^tA = I_n \}$.

Soit $\varphi(A) = A\,{}^tA - I_n$. φ est continue et $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{0\})$

donc $\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ fermé}}$ (im. rec. fermé)

• $GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \det(A) \neq 0 \}$.

Soit $\varphi(A) = \det(A)$. φ est $\mathcal{C}^0$ et $GL_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[)$

donc $\boxed{GL_n(\mathbb{R}) \text{ est ouvert}}$ (im. rec. ouvert).

4) Considerons la norme classique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tM M)}$

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tAA = I_n$

donc $\|A\| = \sqrt{n}$ donc $\underline{O_n(\mathbb{R}) \text{ est borné}}$.

On est en dimension finie, donc $\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est compact}}$

Exercice 4 :

1) $\boxed{\subset}$ Soit $\ell \in V$. $\exists$ une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ qui CV vers ℓ.

Soit $n \in \mathbb{N}$, Alors, $\forall k \geq n$, $\phi(k) \geq k \geq n$ et donc

$$u_{\phi(k)} \in \{u_p \,/\, p \geq n\}$$

Puisque $(u_{\phi(k)})$ CV vers ℓ, on a que $\ell \in \overline{\{u_p ; p \geq n\}}$

Donc $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p ; p \geq n\}}$

$\boxed{\supset}$ Sq $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p ; p \geq n\}}$. Construisons une suite d'entiers $(\phi(k))_k$ telle que $\forall k \geq 1$, $\begin{cases} \|\ell - u_{\phi(k)}\| \leq 2^{-k} \\ \phi(k) > \phi(k-1) \end{cases}$ par récurrence.

Init : $\ell \in \overline{\{u_p ; p \geq 0\}}$ donc $\exists\, \phi(0) \in \mathbb{N} \,/\, \|\ell - u_{\phi(0)}\| \leq 1$

Héréd : Supposons avoir construit $(\phi(0), \dots, \phi(k-1))$ pour $k \geq 1$.

Puisque $\ell \in \overline{\{u_p ; p \geq \phi(k-1)+1\}}$ on dispose donc de

$\phi(k) \in \mathbb{N} \,/\, \phi(k) \geq \phi(k-1)+1 > \phi(k-1)$

et tel que $\|\ell - u_{\phi(k)}\| \leq 2^{-k}$.

On a donc finalement $(u_{\phi(k)})$ CV vers ℓ, donc $\ell \in V$.

---

2) V est fermé comme intersection de fermés

Exercice 5 :

1) Soit $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexes. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [0,1]$.

Alors, $f\circ g(tx+(1-t)y) \leq f(t\,g(x) + (1-t)g(y))$ g cvx et $f \nearrow$

$\leq t\, f\circ g(x) + (1-t) f\circ g(y)$ f cvx

Donc $f\circ g$ CVX.

2) $\boxed{\Rightarrow}$ Sq $\ln(f)$ convexe. Alors, $\forall \alpha > 0$, $f^\alpha = \exp(\alpha \ln(f))$

Donc f^α cvx par 1).

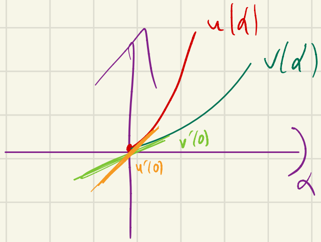
$\boxed{\Leftarrow}$ Sq $\forall \alpha$, f^α cvx.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, et $t \in [0,1]$, on a $u(\alpha) \leq v(\alpha)$

avec $\left| \begin{array}{l} u(\alpha) = \exp(\alpha \ln(f(tx+(1-t)y))) \\ v(\alpha) = t \exp(\alpha \ln(f(x))) + (1-t)\exp(\alpha \ln(f(y))) \end{array} \right.$

Or, $u(0) = v(0)$ donc puisque $\forall \alpha > 0, u(\alpha) \leqslant v(\alpha)$

On a necessairement que $u'(0) \leqslant v'(0)$



Mais $u'(0) = \ln(f(tx + (1-t)y))$

et $v'(0) = t\ln(f(x)) + (1-t)\ln(f(y))$

donc $u'(0) \leqslant v'(0)$ donne que $\boxed{\ln(f) \text{ est CVX}}$

$\boxed{\text{Exo 6 :}}$

1) $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ des suites de E et $\lambda \in \mathbb{R}$

↳ $\|a+b\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n| \leqslant \|a\| + \|b\|$

↳ $\|\lambda a\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda| |a_n| = |\lambda| \, \|a\|$

↳ $\|a\| = 0 \Rightarrow \forall n, \; |a_n| = 0 \Rightarrow \forall n, \; a_n = 0 \Rightarrow a = 0$.

---

2) Soit $\varphi : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ a \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \end{array}$ une forme linéaire.

On a que $\forall a, \; |\varphi(a)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leqslant \|a\|$

donc φ est $\mathcal{C}^0$.

De plus, $F = \varphi^{-1}(\{1\})$ donc $\boxed{F \text{ est fermé.}}$

- Posons $e = (1, 0, 0, \dots) \in F$.

$\forall \alpha > 0$, $e + \alpha e \notin F$ et $\|e - (e + \alpha e)\| = \alpha$.

Donc F n'est pas un voisinage de son élément e, donc <u>F n'est pas ouvert.</u>

- Soit $\alpha^p = e + p(1, -1, 0, 0, \dots, \dots)$

On a que $\forall p$, $\alpha^p \in F$ mais $\|\alpha^p\| \xrightarrow[p \to \infty]{} +\infty$

donc $\boxed{F \text{ n'est pas bornée}}$