Corrigés colle 16

Exercice 1 :

1) $\forall x > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{|e^{itx} - 1|}{|x|} |f(t)| \leqslant \dfrac{2}{x} |f(t)|$.

Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'intégrale existe.

De plus, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|e^{itx} - 1| = |e^{itx/2} - e^{-itx/2}|$

$$= 2 \left| \sin\left(\frac{tx}{2}\right) \right|$$

On utilise l'inégalité classique : $\forall t \in [0; \pi/2]$, $\sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$

(inégalité de concavité mais simple à montrer)

On la généralise, par imparité : $\forall t \in [-\pi/2 ; \pi/2]$, $|\sin(t)| \geqslant \dfrac{2|t|}{\pi}$

Ainsi, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $x = \dfrac{1}{n}$ dans l'inégalité de l'énoncé, d'où

$$M \geqslant \int_{\mathbb{R}} 2n \left|\sin\left(\frac{t}{2n}\right)\right| |f(t)| \, dt \geqslant \int_{-n\pi}^{n\pi} 2n \left|\sin\left(\frac{t}{2n}\right)\right| |f(t)| \, dt$$

$$\geqslant \int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{2|t|}{\pi} |f(t)| \, dt$$

donc $\displaystyle\int_{-n\pi}^{n\pi} |tf(t)| \leq \frac{\pi M}{2}$ donc $t \mapsto tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$

2) Soit $\psi : (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{itx} - 1}{x} f(t)$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad \psi(x,t) \xrightarrow[x \to 0^+]{} itf(t)$

On applique le théorème des accroissements finis à $u \longmapsto e^{iu}$ et on trouve $\forall x > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, $|\psi(x,t)| \leq |tf(t)|$

On peut, avec tout ça, appliquer le TCD et conclure :

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = i \int_{\mathbb{R}} tf(t)\,dt$$

Exercice 2:

1) La fonction $\varphi : (x,t) \mapsto f(x-t)g(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ (par les 2 variables).

donc $f * g$ bien définie.

La 2π-periodicité est immédiate. donc $f * g \in E$.

---

2) Si $f \in \mathcal{C}^\infty$, $\forall t \in [0, 2\pi]$, $x \mapsto \varphi(x,t) \in \mathcal{C}^\infty$

et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi(x,t) = f^{(k)}(x-t)\, g(t)$

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$ (deux variables)

Donc par théorème de dérivation, $f * g \in \mathcal{C}^\infty$

---

3) Soit $\varepsilon > 0$, on suppose qu'il existe $\eta \in]0, \pi[$ tel que si $|s-t| < \eta$ alors $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$.

On sépare l'intégrale en 3 :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\, u_n(t)\, dt = \int_{-\pi}^{-\eta} + \int_{-\eta}^{\eta} + \int_{\eta}^{\pi}$$

Donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{-\eta} |f(x-t) - f(x)|\, u_n(t)\,dt \leqslant 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{-\eta} u_n(t)\,dt$

$\displaystyle\leqslant 2\|f\|_\infty \int_{\eta}^{\pi} u_n(t)\,dt$

par parité de $t \mapsto u_n(t)$

De même $\displaystyle\int_{\eta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\, u_n(t)\,dt \leqslant 2\|f\|_\infty \int_{\eta}^{\pi} u_n(t)\,dt$

et $\displaystyle\int_{-\eta}^{\eta} |f(x-t) - f(x)|\, u_n(t)\,dt \leqslant \varepsilon \int_{-\eta}^{\eta} u_n(t)\,dt$

$\displaystyle\leqslant \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\,dt = \varepsilon.$

D'où l'inégalité demandée.

4) $\forall t \in [0;\pi]$, $\sin(t) \leqslant 1$... (sur $\mathbb{R}$ aussi...)

5) $\displaystyle\int_\eta^\pi U_n(t)\,dt \leqslant \pi\, u_n(\eta) \leqslant \pi\, c_n\,(1+\cos(\eta))^n$

car u_n décroît sur $[\eta;\pi]$

mais $\displaystyle\frac{1}{c_n} = \int_0^{2\pi}(1+\cos(t))^n\,dt = 2\int_0^\pi(1+\cos(t))^n\,dt \geqslant 2\int_0^\pi(1+\cos(t))^n\sin(t)\,dt$ d'après 4)

et $\displaystyle\int_0^{\pi}(1+\cos(t))^n\sin(t)\,dt = \left[-\frac{(1+\cos(t))^{n+1}}{n+1}\right]_0^\pi = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

donc $c_n \leqslant \dfrac{n+1}{2^{n+2}}$ d'où $\displaystyle\int_\eta^\pi U_n(t)\,dt \leqslant \frac{\pi(n+1)}{4}\left(\frac{1+\cos(\eta)}{2}\right)^n$

or $\left(\dfrac{1+\cos(\eta)}{2}\right) < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\pi\frac{(n+1)}{4}\left(\frac{1+\cos(\eta)}{2}\right)^n\right) = 0$

croissances comparées

On, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle |f_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))\,U_n(t)\,dt\right|$

$\displaystyle\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|\,U_n(t)\,dt$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \pi \|f\|_\infty (n+1) \left(\frac{1+\cos(\eta)}{2}\right)^n$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, si n assez grand, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$
autrement dit, (f_n) CVU vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercices 3 à 6 : cf semaine précédente.

Exercice 7.

1) Soit $\varphi(x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}\times[0,1]$.

- $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

et $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}$.

- $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$.

- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, on a la domination :

$$\left| \begin{array}{l} \forall x \in [a,b] \\ \forall t \in [0,1], \end{array} \right. \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant 2b\, e^{-a^2(1+t^2)} \in L^1[0,1]$$

Donc le théorème de dérivation s'applique $\Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2x \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt$

$$= -2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}\,du \quad (u = xt)$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2F'(x)F(x)$.

Comme f et F sont $\mathcal{C}^1$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - f(0) = -\int_0^x 2F'(t)F(t)\,dt = F(0)^2 - F(x)^2 = -F(x)^2$$

Or $F \geqslant 0$ donc $F = \sqrt{f(0) - f(x)}$

et $f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \pi/4$

Avec la domination $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, $0 \leqslant \varphi(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$

et le fait que $t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \in \mathcal{L}^1([0,1])$ et que $\varphi(x,t) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$,

on peut appliquer le TCD et montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

Au final, $\boxed{F(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$