# Corrigés Colle 2

## Exercice 1 à 7 : Voir semaine précédente.

## Exercice 8 :

Soit $\int_1^{\infty} \underbrace{\ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}\right)}_{f(x)} dx$, $\alpha > 0$

- $x \mapsto f(x)$ est continue sur $[1 ; +\infty[$.

- Effectuons un DL en $+\infty$ :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}} \underbrace{- \frac{\sin^2(x)}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2(x)}{x^{2\alpha}}\right)}_{g(x)}$$

On peut ignorer le premier terme car $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}} dx$ CV (IPP)

donc $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ et $\int_1^{\infty} g(x)\,dx$ sont de même nature.

Or $g(x) \underset{x \to \infty}{\sim} - \frac{\sin^2(x)}{2x^{2\alpha}}$ $\quad (g \leq 0)$

or $-g(x) = \frac{1}{4x^{2\alpha}} - \frac{\cos(2x)}{4x^{2\alpha}}$

Par comparaison avec intégrales de Riemann, $\int_1^{\infty} g(x)\,dx$ CV ssi $\alpha > \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ CV ssi } \alpha > 1/2}$

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-nt} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}}_{f(t)} dt$

1) $t \mapsto f(t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0, +\infty[$

En 0 : $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ intégrale de Bertrand (CV car $\frac{1}{2} < 1$)

En $+\infty$ : $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ CV par comparaison.

2) On pose $u = nt$.

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \ln\left(\frac{u}{n}\right)}{\sqrt{\frac{u}{n}}} \frac{du}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}(\ln(u) - \ln(n))}{\sqrt{u}} du$$

$v = \sqrt{u}$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v^2} \ln(v^2)}{v} 2v\, dv}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2}}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$$

Donc $\boxed{I_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$

3) Soit $C = \int e^{-v^2} \ln(v^2) dv$ = cste.

$$I_n = \frac{2C}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{\pi} \ln(n)}{\sqrt{n}} = -\frac{\sqrt{\pi} \ln(n)}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{2C}{\sqrt{\pi} \ln(n)}\right)$$

donc $\boxed{I_n \underset{n \to \infty}{\sim} -\frac{\sqrt{\pi} \ln(n)}{\sqrt{n}}}$

# Exercice 10 :

1) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ intégrable.

On a $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$. On suppose par l'absurde que $l \neq 0$.

On a donc $\begin{cases} f \underset{\infty}{\sim} l \\ \int_a^{+\infty} l\,dt \text{ DV} \end{cases} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ DV.

Nécessairement $l = 0$

2) Par définition de la limite, $\exists A > 0 \,/\, \forall x \geq A$, on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \leq \frac{a}{2}$$

Intégrons l'inégalité entre $A$ et $x$. Comme $f \geq 0$, on a

$$\ln(f(x)) - \ln(f(A)) \leq \frac{a}{2}(x - A)$$

d'où $\forall x \geq A$, $f(x) \leq f(A)\, e^{a/2 (x-A)}$

Comme $\frac{a}{2} < 0$. $x \mapsto e^{a/2\, x} \in L^1(]0, +\infty[)$. Donc $\boxed{f \in L^1(]0, \infty[)}$

Avec la même inégalité, on a que $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$.

Comme $f$ est positive, on en déduit que $\forall x \geq A$, $f'(x) \leq 0$

Ainsi, $\forall x \geq A$, $\int_A^X |f'(t)| dt = -\int_A^X f'(t) dt = f(A) - f(X)$

donc quand $X \to +\infty$, ça converge vers $f(A)$.

Donc $f' \in L^1(]0, +\infty[)$