Corrigés Colle 3 :

Exercice 1 :

a) Soit $t \mapsto f(t) = t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ qui est CPM sur $]0;+\infty[$.

- $\forall t > 1$, $\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = 0$ donc $f(t) = 0$. d'où l'intégrabilité sur $[1;+\infty[$

- $\forall t > 0$, $\frac{1}{t} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq \frac{1}{t}$

donc $1 - t \leq f(t) \leq 1$

donc $f(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 1$. On a donc bien la convergence de I.

b) $I = \int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} \int_{1/n}^1 f(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} I_n$

or $I_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/k+1}^{1/k} k t\,dt$

donc $I_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k(k+1)^2}$

Par DES, $I_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \right)$

d'où $I_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

donc $\boxed{I = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}}$

Exercice 2 :

1) Soit $f(x,t) = \dfrac{1}{1+t^x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0([1;+\infty[)$

- Si $x < 0$ $\quad f(x,t) \underset{t \to \infty}{\sim} 1$

donc divergence

- Si $x = 0$ $\quad f(x,t) = 1$ donc divergence

- Si $x > 0$ $\quad f(x,t) \underset{t \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$

donc par comparaison, il a CV ssi $x > 1$

i.e $\boxed{D =]1;+\infty[}$

2) Soit $x, y \in D$ / $x < y$.

$\forall t \geq 1$, $t^x \leq t^y$ donc $f(x,t) \geq f(y,t)$

donc en intégrant, $\phi(x) \geq \phi(y)$

donc ϕ est décroissante sur D.

3) $\forall t \geq 1$, $\forall x > 1$, $0 \leq f(x,t) \leq \frac{1}{t^x}$

d'où $0 \leq \phi(x) \leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}$

donc $\boxed{\phi(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0}$

Exercice 3 :

1) $\forall x>0, \forall t\in\mathbb{R}, \quad \frac{|e^{itx}-1|}{|x|}|f(t)| \leqslant \frac{2}{x}|f(t)|.$

Comme $f\in L^1(\mathbb{R})$, l'intégrale existe.

De plus, $\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2, \; |e^{itx}-1| = |e^{itx/2}-e^{-itx/2}|$

$$= 2\left|\sin\left(\frac{tx}{2}\right)\right|$$

On utilise l'inégalité classique : $\forall t\in[0,\pi/2], \; \sin(t) \geqslant \frac{2t}{\pi}$

(inégalité de concavité mais simple à montrer)

On la généralise, par imparité : $\forall t\in[-\pi/2;\pi/2], \; |\sin(t)| \geqslant \frac{2|t|}{\pi}$

Ainsi, soit $n\in\mathbb{N}^*$, on prend $x=\frac{1}{n}$ dans l'inégalité de l'énoncé, d'où

$$M \geqslant \int_{\mathbb{R}} 2n\left|\sin\left(\frac{t}{2n}\right)\right||f(t)|\,dt \geqslant \int_{-n\pi}^{n\pi} 2n\left|\sin\left(\frac{t}{2n}\right)\right||f(t)|\,dt$$

$$\geqslant \int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{2|t|}{\pi}|f(t)|\,dt$$

donc $\int_{-n\pi}^{n\pi}|tf(t)| \leqslant \frac{\pi M}{2}$ donc $t\mapsto tf(t)\in L^1(\mathbb{R})$

2) Soit $\varphi : (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{itx} - 1}{x} f(t)$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(x,t) \xrightarrow[x \to 0^+]{} it f(t)$

On applique le théorème des accroissements finis à $u \longmapsto e^{iu}$ et on trouve $\forall x > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x,t)| \leqslant |t f(t)|$

On peut, avec tout ça, appliquer le TCD et conclure :

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = i \int_{\mathbb{R}} t f(t)\, dt$$

$\boxed{\text{Exos 4 à 8}}$ cf semaines précédentes.