Corrigés colle 4

Exercice 1 :

1) On a que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$

Or $$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-1/2}\right) = 1}$$

---

2) On a que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \bigcup_{m\geq 1} \{mk\}$

Donc $\mathbb{P}(A_k) = \sum_{m\geq 1} \mathbb{P}(\{mk\}) = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{2^{mk}} = \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}\right)$

donc $$\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2^k - 1}}$$

---

3) On a que $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3)$

Mais $A_2 \cap A_3 = A_6$.

donc $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{63} = \boxed{\frac{29}{63}}$

4) Soit $p, q \geq 2$. On note $m = \text{ppcm}(p, q)$

Ainsi, $A_p \cap A_q = A_m$.

Supposons par l'absurde que A_p et A_q sont indep.

Alors, $\mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}(A_p)\,\mathbb{P}(A_q)$

d'où $2^m = (2^p - 1)(2^q - 1) + 1 = 2^{p+q} - 2^p - 2^q + 2$

Mais $m \geq 2$ donc 2^m est divisible par 4.

Par contre dans les termes de droite, 2 n'est pas divisible par 4 donc la somme ne l'est pas $\Rightarrow$ contradiction

$\forall p, q \geq 2$, $\boxed{A_p \text{ et } A_q \text{ ne sont pas indep}}$

Exercice 2 :

Notons P l'événement "le joueur obtient pile"

T l'événement "le joueur est un tricheur"

On a $\mathbb{P}(T) = x$

A priori, $\begin{cases} \mathbb{P}(P \mid \bar{T}) = \mathbb{P}(\bar{P} \mid \bar{T}) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(P \mid T) = \mathbb{P}(\bar{P} \mid T) = 1 \end{cases}$

Mais $\mathbb{P}(T \mid P) = \dfrac{\mathbb{P}(T \cap P)}{\mathbb{P}(P)}$ Ramenons nous aux probabilités que l'on connaît

$$\mathbb{P}(T \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid T)\,\mathbb{P}(T)}{\underline{\mathbb{P}(P \mid T)\,\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(P \mid \bar{T})\,\mathbb{P}(\bar{T})}}$$

→ formule des probas totales avec le SCE $(T, \bar{T})$

Donc $\boxed{\mathbb{P}(T \mid P) = \dfrac{x}{x + \frac{1-x}{2}} = \dfrac{2x}{x+1}}$

(on a bien $\mathbb{P}(T \mid P) = 1$ si $x \to 1$ et $\mathbb{P}(T \mid P) = 0$ si $x \to 0$)

Exercice 3 :

1) $\forall \lambda \geq 0, \quad X - m \geq \alpha \iff X - m + \lambda \geq \alpha + \lambda$

donc $\forall \lambda \geq 0, \quad \mathbb{P}(X-m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X-m+\lambda \geq \alpha+\lambda)$

2) On applique l'inégalité de Markov à $(X-m+\lambda)^2$ (qui est bien positive...)

$\forall \lambda \geq 0,$

$$\mathbb{P}(X-m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X-m+\lambda \geq \alpha+\lambda) \leq \mathbb{P}\left((X-m+\lambda)^2 \geq (\alpha+\lambda)^2\right)$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[(X-m+\lambda)^2]}{\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha}$$

On calcule l'espérance

$$\mathbb{E}[(X-m+\lambda)^2] = \mathbb{E}[(X-m)^2] + 2\lambda\mathbb{E}[X-m] + \lambda^2$$

$$= \lambda^2 + \sigma^2$$

On a bien le résultat voulu

3) Posons $\varphi(\lambda) = \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha}$.

On a $\varphi'(\lambda) = \dfrac{2\lambda(\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha) - 2(\sigma^2+\lambda^2)(\lambda+\alpha)}{(\alpha^2+\lambda^2+2\lambda\alpha)^2}$

On a $\varphi'(\lambda) = 0 \iff \lambda(\lambda+\alpha)^2 = (\lambda+\alpha)(\sigma^2+\lambda^2)$

$$\iff \lambda(\lambda+\alpha) = \sigma^2+\lambda^2$$

$$\iff \lambda = \frac{\sigma^2}{\alpha}.$$

φ admet un minimum en $\frac{\sigma^2}{\alpha}$ qui vaut $\varphi\left(\frac{\sigma^2}{\alpha}\right) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(X-m \geq \alpha) \leq \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\sigma^2}}$

4) $\{|X-m| \geq \alpha\} = \{X-m \geq \alpha\} \sqcup \{X-m \leq -\alpha\}$

donc $\mathbb{P}(|X-m| \geq \alpha) = \mathbb{P}(X-m \geq \alpha) + \mathbb{P}(X-m \leq -\alpha)$

$$\leq \frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2}$$

On a "mieux" que l'inégalité de B-T ssi $\frac{2\sigma^2}{\alpha^2+\sigma^2} \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$

ssi $\sigma^2(\alpha^2-\sigma^2) \leq 0$ ssi $\boxed{\alpha \leq \sigma}$

Exercice 4 :

* $\Omega = f^{-1}(f(\Omega))$ donc $\boxed{\Omega \in \mathcal{T}}$

* Soit $A \in \mathcal{T}$

Soit $x \in f^{-1}(f(\bar{A}))$ alors $\exists y \in \bar{A}$ / $x = f^{-1}(f(y))$

ie $f(x) = f(y)$

Supposons par l'absurde que $x \in A$.

↳ Alors $y \in f^{-1}(f(A)) = A$ ce qui est impossible

Donc $x \in \bar{A}$ et donc $f^{-1}(f(\bar{A})) \subset \bar{A}$

L'inclusion réciproque est directe, donc $\boxed{\bar{A} \in \mathcal{T}}$

* Soit $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, on a $f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(A_n)$

(ça se montre facilement)

et donc $f^{-1}\left(f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}(f(A_n)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ $\boxed{\text{ie } \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}}$

Exercice 5 :

1) $S_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ par définition et donc

$$G_{S_1}(t) = \frac{pt}{1-qt}$$

2) Idem pour $S_n - S_{n-1}$, $n \geq 2$.

3) On écrit : $S_n = \sum_{k=1}^{n} S_k - S_{k-1}$ où $S_0 = 0$.

Or, les variables aléatoires de cette somme sont indep.

En effet, $\mathbb{P}(S_1 - S_0 = n_1, S_2 - S_1 = n_2, \dots, S_n - S_{n-1} = n_n)$

$$= \mathbb{P}\left[(X_{n_1} = X_{n_1+n_2} = \cdots = X_{n_1+\cdots+n_n} = 1) \bigcap \{ X_k = 0,\ k \in [\![1 ; n_1+\cdots+n_n]\!] \setminus \{n_1, n_1+n_2, \dots, n_1+n_2+\cdots+n_n\} \} \right]$$

Et les variables $(X_k)_{k \in [\![1 ; n_1+\cdots+n_n]\!]}$ sont indep.

On en déduit que $G_{S_n}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt} \right)^n$

C'est la loi "binomiale négative"

En effet, on peut réécrire $G_{S_m}(t) \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} q^n p^m t^{n+m}$

$$= \sum_{m}^{\infty} \binom{n-1}{m-1} q^{n-m} p^m t^n$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(S_m = n) = \binom{n-1}{m-1} q^{n-m} p^m, \ \forall n \geq m}$

(*) Voir wikipedia pour la formule admise "Formule du binôme négatif"

Exercice 6 :

1) $\forall t \in \mathbb{R}$, on a avec convergence absolue que

$$\boxed{M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{kt} = e^{\lambda(e^t - 1)}}$$

2) Si X est à support fini, on peut développer en série entières sur $\mathbb{R}$ et

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{t x_k} \mathbb{P}(X = x_k) \quad (\text{si } X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\})$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{k=1}^{n} (x_k)^{\ell} \, \mathbb{P}(X = x_k) \, t^{\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \mathbb{E}(X^{\ell}) \, t^{\ell}$$

d'où $\forall n$, $E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$

$\to$ dénombrable.

* Si $X(\Omega)$ est infini, on note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$

$\forall t \in]-a;a[$, on pose $u_n(t) = \mathbb{P}(X = x_n) e^{t x_n}$

↳ La série de fonct° CVS sur $]-a;a[$

↳ Les u_n sont de classe C^∞ avec

$$\forall k, \quad u_n^{(k)}(t) = \mathbb{P}(X = x_n)\, x_n^k e^{t x_n}$$

↳ Soit $\alpha > 0$ / $[-\alpha;\alpha] \subset]-a;a[$,

$\forall t \in [-\alpha;\alpha]$, $\quad |u_n^{(k)}(t)| \leqslant \mathbb{P}(X = x_n) |x_n^k| e^{\alpha |x_n|}$

Soit $\rho \in]\alpha; a[$, on a que

$$\mathbb{P}(X = x_n) |x_n|^k e^{\alpha |x_n|} = |x_n|^k e^{(\alpha - \rho)|x_n|} \mathbb{P}(X = x_n) e^{\rho |x_n|}$$

la fonct° $t \mapsto t^k e^{(\alpha-\rho)t}$ est C^0 sur $[0;+\infty[$ et est bornée, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n|^k e^{(\alpha-\rho)|x_n|} \leqslant M_k$

D'autre part, $\mathbb{P}(X=a_n)e^{p|a_n|} \leqslant \mathbb{P}(X=a_n)e^{pa_n} + \mathbb{P}(X=a_n)e^{-pa_n}$

Comme M_X converge en p et $-p$, on a donc que

$$\sum \mathbb{P}(X=a_n)e^{p|a_n|} < \infty.$$

Donc $\forall k$, $|u_n^{(k)}(t)| \leqslant M_k \mathbb{P}(X=a_n)e^{p|a_n|}$

d'où la CVN donc CVU de $\sum u_n^{(k)}$ sur $[-\alpha;\alpha]$.

Par théorème, on a que $M_X \in C^\infty(]-r;r[)$ et que

$\forall k$, $M_X^{(k)}(0) = \sum_{n\geqslant 0} u_n^{(k)}(0) = \sum_{n\geqslant 0} a_n^k \mathbb{P}(X=a_n)$

i.e. $\boxed{M_X^{(k)}(0) = E(X^k)}$