Corrigés colle 5 :

Exercice 1 à 3 : cf semaine précédente

Exercice 4

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, le théorème du rang donne que

$$\dim(E_k) = \dim(\mathrm{Im}(f_k)) + \dim(\ker(f_k))$$

Or, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dim(\mathrm{Im}(f_k)) = \dim(\ker(f_{k+1}))$

car $\mathrm{Im}(f_n) = \{0\}$

donc $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim(E_k) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \dim(\ker(f_k)) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim(\ker(f_k))$$

$$= -\dim(\ker(f_1)) \text{ par télescopage.}$$

Or, $\ker(f_1) = \mathrm{Im}(f_0) = \{0\}$ donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim(E_k) = 0}$

Exercice 5 :

$\Rightarrow$) Soit f un tel endomorphisme. Alors, par th. du rang

$$n = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + rg(f) = 2\,rg(f)$$

Donc n est pair

$\boxed{\Leftarrow}$ Si n est pair, $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}$.

* Si $p = 0$ $\quad f = 0$ convient

* Si $p > 0$ Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2p})$ une base de E

et soit f l'endomorphisme tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_p) = 0 \\ f(e_{p+1}) = e_1,\ f(e_{p+2}) = e_2, \dots,\ f(e_{2p}) = e_p. \end{cases}$$

On a bien que $\begin{array}{l} \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \mathrm{Im}(f) \\ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker(f) \end{array}$

donc $\begin{cases} \dim(\ker(f)) \geq p \\ \mathrm{rg}(f) \geq p. \end{cases}$

On a égalité par th du rang (cf $2p = \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f))$)

Par inclusion et égalité des dimensions, $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \ker(f)}$

Exercice 6 :

a) * $C(f) \subset \mathcal{L}(E)$

* $0_{\mathcal{L}(E)} \in C(f)$

* Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(g,h) \in (C(f))^2$

$$f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda (f \circ g) + \mu (f \circ h)$$
$$= \lambda (g \circ f) + \mu (h \circ f)$$
$$= (\lambda g + \mu h) \circ f \quad \blacksquare$$

b) On dispose bien de $a \in E \,/\, f^{n-1}(a) \neq 0$ (car $f^{n-1} \neq 0$).

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ tq $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(a) = 0$

On applique, $\forall j \in [\![0;n-1]\!]$, f^{n-1-j}, donc, $\forall j \in [\![0;n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f^{n-1-j+i}(a) = 0$

Ainsi, on trouve successivement $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$

d'où la liberté de la famille.

Ainsi $\begin{cases} (a, f(a), \dots, f^{n-1}(a)) \text{ libre} \\ \mathrm{card}(a, \dots, f^{n-1}(a)) = n = \dim(E) \end{cases}$

donc $\boxed{(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a)) \text{ est une base de } E}$

---

c) * φ_a est bien linéaire :

$$\varphi_a(\lambda h + \mu g) = \lambda h(a) + \mu g(a) = \lambda \varphi_a(h) + \mu \varphi_a(g)$$

* Soit $g \in \ker \varphi_a$

Alors, $g(a) = 0_E$ donc $g(f(a)) = f(g(a)) = 0_E$

En itérant, on montre que $\forall i \in [\![0, n-1]\!], g(f^i(a)) = 0_E$.

donc g est nulle sur la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$

donc $g = 0$, donc φ_a est injective.

* Soit $b \in E$.

On considère $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$g(a) = b$; $g(f(a)) = f(b)$; ..... , $g(f^{n-1}(a)) = f^{n-1}(b)$

On a bien défini g sur une base. et on a que $g \circ f = f \circ g$ sur cette base.

Donc $g \in C(f)$ et $\varphi_a(g) = b$, donc

$\boxed{\varphi_a \text{ est surjective.}}$

d) Comme φ est un isomorphisme, $\underline{\dim(C(f)) = n}$

Or, $\underline{\mathrm{Vect}(Id, f, ..., f^{n-1}) \subset C(f)}$

Par inclusion et égalité des dim,

$$\boxed{C(f) = \mathrm{Vect}(Id, f, ..., f^{n-1})}$$