Exercice 1

1) $V(a_0, \dots, a_n) = a_0 a_1 \dots a_n \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}}_{W(a_0, \dots, a_n)}$

$W(a_0, \dots, a_n)$ est un déterminant de Vandermonde de taille $n+1$.

On peut montrer par récurrence que $W(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

ou de cette façon :

Soit P le polynôme de degré n qui admet pour racines $(a_0, \dots, a_{n-1})$

$P(X) = \prod_{i=0}^{n-1} (X - a_i)$ (on peut le prendre unitaire)

$= X^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j$

Faisons $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} + \alpha_0 C_1 + \dots + \alpha_{n-1} C_n$

On a $W(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \dots & 0 \\ | & | & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ 1 & a_n & \dots & P(a_n) \end{vmatrix} = P(a_n) W(a_0, \dots, a_{n-1})$
$= \prod_{i=0}^{n-1} (a_n - a_i) \; W(a_0, \dots, a_{n-1})$

Par récurrence, $\underline{W(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}$ $\neq 0$ car les (a_i) sont distincts.

De plus, $\forall i$, $a_i \neq 0$ donc $\underline{V(a_0, \dots, a_n) \neq 0}$.

2) Comme $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $F_j \in \mathbb{R}_n[X]^*$, de dim finie $n+1$, il suffit de montrer que $(F_0, \dots, F_n)$ est libre

Supposons qu'on ait $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ / $\lambda_0 F_0 + \dots + \lambda_n F_n = 0$.

On applique cela à $1, 2X, \dots, (n+1)X^n$ et on trouve :

$$\begin{cases} \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \\ \lambda_0 a_0^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 = 0 \\ \\ \lambda_0 a_0^{n+1} + \dots + \lambda_n a_n^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Les $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ étant distincts, le déterminant "de Vandermonde" $V(a_0, \dots, a_n) \neq 0$, donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ nécessairement.

(car la matrice "de Vandermonde" A associée est inversible, donc $AX = 0 \Rightarrow X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$)

D'où la liberté de la famille. Ainsi, $(F_0, \dots, F_n)$ base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

Exo 2 :

1) On montre par récurrence que $\forall k$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$

donc par linéarité, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$

2) Si M est diagonalisable, alors M annule un polynôme scindé à racines simples.

Si on note Q un tel polynôme alors si $Q(M) = 0$, $Q(A) = 0$ d'après les questions précédentes. donc A est diagonalisable.

De plus, A annule XQ' donc si λ est vap de A, alors λ est racine commune de Q et XQ'

Or Q n'a que des racines simples donc Q et Q' n'ont pas de racines communes donc $\lambda = 0$. donc $Sp(A) = \{0\}$.

$\begin{cases} A \text{ est diagonalisable} \\ Sp(A) = \{0\} \end{cases} \Rightarrow A = 0.$

Réciproquement si $A = 0$, M est diagonalisable.

$\boxed{\text{Au final, } M \text{ est diagonalisable} \iff A = 0}$

Exercice 3

On peut écrire $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ où les λ_k sont les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités (quitte à ce que la multiplicité soit nulle).

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ B - \lambda_k I_n \in GL_n(\mathbb{C})$$

$$\iff \forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ \lambda_k \notin Sp(B)$$

$$\iff Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$$

Exercice 4 ϕ est bien un endomorphisme.

Calculons ses éventuelles valeurs propres :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq 0$ tel que $\phi(M) = \lambda M$.

donc ${}^tM = \lambda M$. i.e $\begin{cases} \forall i \in [\![1;n]\!], \ m_{ii} = \lambda m_{ii} \\ \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 / i \neq j, \ m_{ji} = \lambda m_{ij} \end{cases}$

donc $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $m_{ij} = \lambda^2 m_{ij}$ donc $\lambda = \pm 1$.

* Si $\lambda = -1$, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $m_{ji} = -m_{ij}$ donc M est antisymétrique.

-1 est donc valeur propre pour les vecteurs propres de $\mathrm{Vect}\left((E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq j < i \leq n}\right)$. L'espace propre associé est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$

* Si $\lambda = 1$: $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]$, $m_{ji} = m_{ij}$ donc M symétrique.

1 est valeur propre pour les vecteurs propres $\mathrm{Vect}(E_{ii}, E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i \leq j \leq n}$

L'espace propre associé est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

On a bien $n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$ donc ϕ est diagonalisable (CNS)

Exercice 5. Question 1 page suivante $\Rightarrow$

2). Soit u un vecteur propre de f, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K} \,/\, f(u) = \lambda u$.

Comme $F = \mathrm{Vect}(u)$, $\forall x \in F$, $\exists \mu \in \mathbb{K} \,/\, x = \mu u$

donc $f(x) = f(\mu u) = \mu f(\mu) = \lambda \mu u \in F$

donc F est stable par f.

• Si $F = \mathrm{Vect}(u)$ est stable par f.

Si $x \in F$, $x \neq 0$, alors $f(x) \in F$ on x s'écrit $x = \mu u$ où $\mu \in \mathbb{K}^*$.

donc $f(x) = f(\mu u) = \mu f(u) \in F$. alors $\mu f(u)$ s'écrit

$\mu f(u) = \lambda u$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ donc $f(u) = \frac{\lambda}{\mu} u$ (car $\mu \neq 0$)

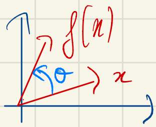
donc u est bien vecteur propre.

3). $f(0) = 0$ donc $\{0\}$ stable par f.

. $\forall x \in E$, $f(x) \in E$ car $f \in \mathcal{L}(E)$ donc E stable par f.

Il faut trouver un endomorphisme qui ne laisse stable aucune droite.

Une rotation d'angle $\theta \in]0, \pi[$ convient :



puisque les 2 seuls espaces stables sont $\{0\}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

3) • <u>Montrons que $\ker(f)$ est stable par f :</u>

Soit $x \in \ker(f)$, $f(x) = 0$ donc $f(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \ker(f)$.

• <u>Montrons que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f :</u>

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, $\exists x \in E$ / $y = f(x)$ donc $f(y) = f(f(x)) \in \mathrm{Im}(f)$.

<u>~~*~~ Si n est pair :</u>

Comme f n'est pas injective, $\ker(f) \neq \{0\}$. Comme $f \neq 0$, $\ker(f) \neq E$ donc $\ker(f)$ est un sev stable par f différents des deux premiers. On a donc au moins 3 sev stables ($\{0\}$, E et $\ker(f)$)

<u>~~•~~ Si n impair</u> le théorème du rang $n = rg(f) + \dim(\ker(f))$ assure que $rg(f) \neq \dim(\ker(f))$ donc $\mathrm{Im}(f) \neq \ker(f)$.

Comme f est non nulle, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$

Comme f non injective, $\dim(\ker(f)) \neq 0$ donc $rg(f) \neq n$

donc $\mathrm{Im}(f) \neq \ker(f)$, $\mathrm{Im}(f) \neq E$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$.

On a donc notre $4^{\text{ème}}$ sev stable.

1) Si $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$,

alors $\chi_{M_\theta} = \begin{vmatrix} X-\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & X-\cos(\theta) \end{vmatrix} = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$

de discriminant $\Delta = 4(\cos^2(\theta) - 1) \leq 0$

- Si $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\Delta = 0$ et la racine double de χ_{M_θ} est $\lambda = 1$ donc $M_\theta = id$.

- Si $\theta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\Delta = 0$ et la racine double de χ_{M_θ} est $\lambda = -1$ donc $M_\theta = -id$

- Sinon, χ_{M_θ} n'admet pas de racines réelles, donc pas de valeurs propres réelles. Utiliser ceci pour la question 3); les seules espaces stables sont alors $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 :

1) Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $AB = A(BA)A^{-1}$

donc AB et BA sont semblables donc ont même polynômes caractéristique [Si M, N semblables $M = PNP^{-1}$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$\det(M - \lambda I_n) = \det(P(N - \lambda I_n)P^{-1}) = \det(P)\det(P^{-1})\det(N - \lambda I_n)$
$= \det(N - \lambda I_n)$.]

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on construit une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{K})$ (donc une suite de matrices inversibles) qui converge vers M.

$\forall p \geq 1$, posons $M_p = M - \frac{1}{p} I_n$.

- D'une part, $M_p \xrightarrow[p \to \infty]{} M$.

- D'autre part, à partir d'un certain rang, les M_p sont inversibles. En effet, $\chi_M\left(\frac{1}{p}\right) = \det(M_p)$.

Or $d^\circ \chi_M = n$ donc χ_M a au plus n racines. Ainsi, $\exists p_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq p_0$, $M_p \in GL_n(\mathbb{K})$.

3) L'idée est de se ramener à la question 1.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $P(\lambda) = \det(XI_n - (A - \lambda I)B)$

$$Q(\lambda) = \det(XI_n - B(A - \lambda I_n))$$

P et Q sont des polynômes donc des fonctions continues.

$P(\lambda) = Q(\lambda)$ pour une infinité de λ par densité et d'après la question 1.

En particulier, $P(0) = Q(0)$, d'où le résultat.