Corrigés colle 17

Exercice 1 :

1) Comme $AB = BA$, alors $\forall k$, $A^kB = BA^k$ (récurrence).

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a donc que

$$A\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{AB^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{B^kA}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!}\right) A$$

Donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on a que

$$\boxed{A \exp(B) = \exp(B) A}$$

---

2) Par dérivation d'un produit (licite car le produit matriciel est bilinéaire),

$$\forall t,\ g'(t) = (A+B)\, e^{t(A+B)} e^{-tB} - e^{t(A+B)} B e^{-tB}$$

Mais comme A et B commutent, B et $t(A+B)$ commutent, $\forall t$.

Donc B et $e^{t(A+B)}$ aussi (Q1)

Donc au final, $\forall t$, $g'(t) = (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB} - Be^{t(A+B)}e^{-tB}$

$$= A\,g(t)$$

De plus, $g(0) = I_n$.

Donc g vérifie le système (E) : $\begin{cases} M'(t) = AM(t) \\ M(0) = I_n. \end{cases}$

De plus, $f_A'(t) = A f(t)$ et $f_A(0) = I_n$, donc f_A vérifie aussi ce système (E) !

3) Par unicité de la solut° d'un pb de Cauchy, $g = f_A$.

En particulier, pour $A = 0$, on a que $e^{tB}e^{-tB} = I_n$, ce qui montre que e^{tB} est inversible d'inverse e^{-tB}.

Par $g = f_A$, on en déduit donc que $\boxed{e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}}$

Exercice 2

1) Soit $\varphi(x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}\times[0,1]$.

. $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

et $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}$.

. $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$.

. Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}$, on a la domination :

$$\left| \begin{array}{l} \forall x\in[a,b] \\ \forall t\in[0,1], \end{array} \right. \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2b\, e^{-a^2(1+t^2)} \in L^1[0,1]$$

Donc le théorème de dérivation s'applique $\Rightarrow f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt$

$$= -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du \quad (u = xt)$$

2) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = -2F'(x)F(x)$.

Comme f et F sont $\mathcal{C}^1$, on a ; $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f(x) - f(0) = -\int_0^x 2F'(t)F(t)\,dt = F(0)^2 - F(x)^2 = -F(x)^2$$

Or $F \geq 0$ donc $F = \sqrt{f(0) - f(x)}$

et $f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \pi/4$

Avec la domination $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, $0 \leq \varphi(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$

et le fait que $t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \in L^1([0,1])$ et que $\varphi(x,t) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$,

on peut appliquer le TCD et montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

Au final, $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Exercice 3 :

1) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall$ suite (x_n) telle que $(x_n) \to a$, alors
$f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$

2) En posant $g_t \begin{cases} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto g\left(\frac{u}{t}\right) \mathbb{1}_{[0;ta]} \end{cases}$

On a que $g_t \in \mathcal{C}_{pm}([0;+\infty[)$, bornée car g est $\mathcal{C}^0$ sur un segment.

De plus $\int_0^a e^{-tx} g(x)\,dx = \frac{1}{t}\int_0^{\infty} e^{-u} g_t(u)\,du$

3) Utilisons le critère séquentiel de la limite ainsi que le TCD.

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0;+\infty[$ telle que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Posons $f_n : \begin{cases} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto e^{-u} g_{t_n}(u) \end{cases}$

- $\forall n, f_n \in \mathcal{C}_{pm}([0,+\infty[)$
- Soit $u \in [0,+\infty[$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N$, $u \leq t_n d$

Ainsi, $\forall n \geq N$, $f_n(u) = e^{-u} g\left(\frac{u}{t_n}\right)$

g étant continue en 0, $f_n(u) \xrightarrow{cvs} e^{-u} g(0) = f(u)$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [0,+\infty[$, $|f_n(u)| \leq e^{-u} \|g\|_\infty$

et $u \mapsto e^{-u} \|g\|_\infty \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Donc, le TCD donne que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} g_{t_n}(u)\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-u} g(0)\,du = g(0)$$

Ceci étant vrai pour toute suite (t_n) qui tend vers $+\infty$,

alors $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u} g_t(u)\,du \xrightarrow[t\to+\infty]{} g(0)$ par 1) con $g(0) \neq 0$.

Ainsi, $\lim_{t\to\infty} \left(\int_0^d e^{-tx} g(x)\,dx \, \frac{t}{g(0)} \right)$

$= \lim_{t\to\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} g_t(u)\,du \right) \times \frac{1}{g(0)} = 1$

donc $\int_0^d e^{-tx} g(x)\,dx \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}$

Exercice 4.

1) φ_h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. En effet,

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [kh, (k+1)h[, \quad \varphi_h(t) = f(kh),$

Donc φ_h est continue (car constante) sur $]kh; (k+1)h[$.

De plus, $\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} \lim\limits_{t \to (kh)^+} \varphi_h(t) = \varphi_h(kh) = f(kh) \\ \lim\limits_{t \to (kh)^-} \varphi_h(t) = \varphi_h((k-1)h) = f((k-1)h) \end{cases}$

On a donc des limites à gauche et à droite finies aux points de discontinuité.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_0^{nh} \varphi_h(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \varphi_h(t)\,dt$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} h f(kh)$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} S(h)$$

De plus, $\varphi_h \in L^1(\mathbb{R}_+)$ car

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|\varphi_h(t)| = \left|f\left(\lfloor \frac{t}{h} \rfloor h\right)\right| \leqslant \underbrace{\dfrac{C}{1+\lfloor \frac{t}{h}\rfloor^2 h^2}}_{\underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{C}{t^2} \in L^1(\mathbb{R}_+)}$

On peut donc écrire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{nh} \varphi_h(t)\,dt = S(h)$

---

2) Si $h \in]0,1]$ et $t \in [1;+\infty[$, alors

$\lfloor \frac{t}{h} \rfloor h \geqslant \left(\frac{t}{h} - 1\right) h \geqslant t - h \geqslant t-1 \geqslant 0$.

Donc $|\varphi_h(t)| \leqslant \dfrac{C}{1+(t-1)^2}$

---

3) <u>Astuce importante</u>. On utilise le critère sequentiel combiné au TCD.

Soit (h_n) une suite de réels stt positifs qui tend vers 0.

Si on montre que $S(h_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{\infty} f(t)\,dt$ par TCD,

on en déduira que $\lim\limits_{h\to 0} S(h) = \int_0^{\infty} f(t)\,dt$ par critère

séquentiel. Comme $(h_n) \to 0$, on peut supposer que

$h_n \in]0;1]$ (c'est vrai APCR ...)

$\Rightarrow$ TCD :

* $\forall n$, φ_{h_n} sont CPM sur $\mathbb{R}_+$ (cf q 1))

* $\forall n$, $t - h_n = \left(\frac{t}{h_n} - 1\right) h_n \leq \left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n \leq \frac{t}{h_n} h_n = t$

donc $\left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$ par th. des gendarmes.

Ainsi, par continuité de f : $\varphi_{h_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$

On a donc CVS de $(\varphi_{h_n})_n$ vers f sur $\mathbb{R}_+$.

* $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\varphi_{h_n}(t)| \leq C$ et avec la question précédente, on a en fait que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\varphi_{h_n}(t)| \leq \alpha(t) = \begin{cases} C & \text{si } t \in [0,1] \\ \dfrac{C}{1+(t-1)^2} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

où $\alpha \in L^1(\mathbb{R}_+)$ (et est continue).

On applique donc le TCD :

$$\boxed{S(h) \xrightarrow[h \to 0]{} \int_0^{\infty} f(t)\,dt}$$

Exercice 5 : Soit $f(x,t) := \dfrac{1}{1+t^x}$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^0([0;+\infty[)$. Donc on regarde seulement en $+\infty$.

- Si $x < 0$, $t^x \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ donc $f(x,t) \underset{t\to\infty}{\sim} 1$

  Or $\int_0^{+\infty} 1\,dt$ DV.

- Si $x = 0$, $f(x,t) = \frac{1}{2}$ donc $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ DV

- Si $x > 0$, $f(x,t) \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t^x}$, donc CV ssi $x > 1$

Ainsi $\boxed{D =]1;+\infty[}$

Thm continuité :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est CPM sur $]0;+\infty[$

(ii) $\forall t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur D.

(iii) Soit $[a,b] \subset D$. $\forall x \in [a,b]$ et $\forall t \in]0;+\infty[$,

- Si $t \in]0,1]$, $\quad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^b}$

- Si $t \in]1;+\infty[$, $\quad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^a}$

On a donc $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+t^b} & \text{si } t \in]0,1] \\ \dfrac{1}{1+t^a} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ qui est

CPM, intégrable, et telle que $\forall x \in [a,b], \forall t \in]0,+\infty[, f(x,t) \leqslant \varphi(t)$

Donc $\boxed{F \text{ est continue.}}$ par théorème.

---

2) $\forall x, \forall t, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}$ qui est continue sur $D \times]0,+\infty[$.

$\forall [a,b] \subset D$, $\quad \left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{|\ln(t)|}{1+t^b} & \text{si } t \in [0,1] \\ \dfrac{|\ln(t)|}{1+t^a} & \text{si } t > 1, \end{cases} = \varphi(t)$

En effet, $\left| \dfrac{t^x}{(1+t^x)^2} \right| \leqslant \dfrac{1+t^x}{(1+t^x)^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^x}$

Comme φ est CPM intégrable, on a l'hypothèse de domination, et donc que $F \in C^1$ et

$$\forall x \in D, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}\, dt$$

Or, $\forall x \in D$, $$F'(x) = -\underbrace{\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}\, dt}_{\text{CDV } u = \frac{1}{t}} - \int_1^{\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}\, dt$$

$$dt = -\frac{du}{u^2}$$

$$= -\int_1^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{u}\right)^x \ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(1+\left(\frac{1}{u}\right)^x\right)^2 u^2}\, du - \int_1^{\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2} \frac{1}{t^2}\, dt - \int_1^{\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt$$

3) On coupe en deux, entre]0 et 1[et [1 et +∞[

* $\forall t \in]0,1[$, $\dfrac{1}{1+t^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

et $\forall x > 0$, $\left|\dfrac{1}{1+t^x}\right| \leqslant 1$ qui est intégrable sur $]0,1[$

Donc, par TCD, $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^x} = \int_0^1 1\,dt = 1$

* $\forall t \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^x} \leqslant \dfrac{1}{t^x}$

donc $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x} \leqslant \frac{1}{x-1}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x} = 0$ par gendarmes.

Donc, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$

4) Si F admet une limite ℓ en 1^+, alors $\forall x > 1, F(x) \leq \ell$ car F est décroissante.

Mais comme on intègre une fonction positive, on en déduit que $\boxed{\forall A > 1, \int_1^A \frac{dt}{1+t^x} \leq \ell}$

---

5) Faisons tendre x vers 1 dans l'inég. précédente.

Puisque $\forall t \in [1, A], \frac{1}{1+t^x} \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{1}{1+t}$

et $\left| \frac{1}{1+t^x} \right| \leq 1 \quad , \forall t \in [1, A]$.

Comme 1 est intégrable sur $[1, A]$, on applique le TCD, et donc $\int_1^A \frac{dt}{1+t} \leq \ell$

Comme ceci est vrai $\forall A$ et que $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est positive sur $[1, A]$, on en déduit que $\int_1^{\infty} \frac{dt}{1+t}$ CV.

Mais ceci est absurde car $\int_1^0 \frac{dt}{1+t}$ DV (Riemann)

Donc F n'admet pas de limite finie en 1^+.

Mais F est décroissante, donc admet une limite en 1^+ qui peut être finie ou égale à $+\infty$.

Donc, par ce qui précède, $\boxed{\lim_{x \to 1^+} F(x) = +\infty}$