Corrigés colle 19

Exercice 1 :

1) Par définition, on traduit l'hypothèse $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$ par

$$\forall A > 0, \exists B_A > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > B \Rightarrow f(x) > A.$$

Il suffit de de prendre $A = |f(0)| + 1 > 0$ pour avoir le résultat.

2) $B = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq M\}$ est compacte (fermé borné dans $\mathbb{R}^n$)

* $f_{|B}$ est continue, donc $\exists x^* \in B$ tq $\forall x \in B, f(x) \geq f(x^*)$

* De plus, si $x \notin B$, $f(x) > |f(0)| + 1$ (car $\|x\| > M$)

or, $|f(0)| + 1 > f(0) \geq f(x^*)$ car $0 \in B$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) \geq f(x^*) \text{ où } x^* \in B \subset \mathbb{R}^n.}$$

3) Si f C^1 sur un ouvert admettant un extremum local en un point x_0, alors $Df(x_0) = 0$.

C'est le cas ici, donc $\boxed{Df(x^*) = 0.}$

Exercice 2 :

1). f est $\mathcal{C}^1$ car polynomiale.

- $\forall (M,H) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$, $f(M+H) = f(M) + HM + MH + H^2$

or $H^2 = o(\|H\|)$, donc $\boxed{df(M)(H) = HM + MH}$

2) $\phi : Gl_n(\mathbb{R}) \mapsto Gl_n(\mathbb{R})$ et $Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En effet, $Gl_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, \det(M) \neq 0 \} = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, donc Gl_n est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue. Comme $I_n \in Gl_n$, il est bien possible de calculer la différentielle en un élément de l'ouvert $Gl_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $\|H\| \leqslant \frac{1}{2}$

Alors, $(I_n + H) \times \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k H^k \right) = I_n + (-1)^p H^{p+1}$

Mais comme $\|H\| < 1$, alors $H^p \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$ et donc

$$(I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H^k = I_n - H + H^2 \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k \right)}_{\varphi(H)}$$

Or, $\|\varphi(H)\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|H\|^k = \frac{1}{1 - \|H\|} \leqslant 2$.

Ainsi, $\|H^2 \varphi(H)\| \leqslant 2 \|H\|^2 = o(\|H\|)$

donc, $\phi(I_n + H) = \phi(I_n) - H + o(\|H\|)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{donc} \quad d\phi(I_n)(H) = -H \\ \text{ou} \quad d\phi(I_n) = -\mathrm{id}. \end{array}}$$

Exercice 3 : Inspiré par le cours de physique de PC*,

on pose $\begin{cases} u = x + at \\ v = x + bt \end{cases}$ et donc $f(x,y) = g(u,v)$.

Par la règle de la chaîne, appliqué deux fois,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab \dfrac{\partial F}{\partial u \partial v} + b^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{cases}$$

d'où, grâce à l'éq. de d'Alembert

$$(c^2 - a^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(c^2 - ab) \frac{\partial^2 F}{\partial u v} + (c^2 - b^2) \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

En prenant $\begin{cases} a = c \\ b = -c \end{cases}$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0 \quad \text{d'où} \quad F(u,v) = \phi(u) + \varphi(v)$$

donc $\boxed{f(x,y) = \phi(x+ct) + \varphi(x-ct) \text{ où } (\phi, \varphi) \in \mathcal{C}^2.}$

Exercice 4 :

1) Notons $A(x) = (a_{i,j}(x)) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont $D_n(x)$ est le déterminant.

$x \mapsto A(x)$ est dérivable car ses fonctions coordonnées le sont, et la multilinéarité du det nous donne que D_n est dérivable et que

$$D_n' = \det(C_1', C_2, \dots, C_n) + \dots + \det(C_1, C_2, \dots, C_n')$$

et donc $D_n' = \det(C_1, C_2, \dots, C_n')$ car les autres déterminants sont nuls.

Ainsi, $\boxed{\forall x,\ D_n'(x) = D_{n-1}(x)}$

2) On a que $D_n(0) = 0$ et $D_1(x) = x$.

Par récurrence, on montre que $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

et donc que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} D_n(x) = \exp(x)}$

Exercice 5 :

On introduit la fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u(x) & v(x) & w(x) \end{vmatrix}$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a;b[$,

$$\forall x \in]a,b[, \quad f'(x) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(x) & v'(x) & w'(x) \end{vmatrix}$$

De plus, $f(a) = f(b) = 0$ donc $\exists d \in]a;b[\;/\; f'(d) = 0$ (Rolle)

Et, $f'(a) = f'(d) = 0$, donc $\exists c \in]a;d[\subset]a;c[\;/\; f''(c) = 0$

d'où le résultat.

Exercice 6 :

1) $\forall t \in I, \quad g(t) = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}$

La fonction racine est dérivable sur $]0; +\infty[$ (de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$) et la fonction $t \mapsto \langle f(t), f(t) \rangle$ est dérivable sur I $\left(\text{de dérivée } t \mapsto 2\langle f(t), f'(t) \rangle\right)$

D'où la dérivabilité de g.

2) $\forall t \in I, \quad g'(t) = \dfrac{2\langle f(t), f'(t) \rangle}{2\sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}}$

ie $\boxed{\forall t \in I, \quad g'(t) = \dfrac{\langle f(t), f'(t) \rangle}{\| f(t) \|}}$

Exercice 7 :

1) $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$

2) 1ère méthode : Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Comme f est différentiable en 0,

$$f(\lambda x) \underset{\lambda \to 0}{=} f(0) + df(0)(\lambda x) + o(\lambda)$$

donc $$\lambda f(x) \underset{\lambda \to 0}{=} df(0)(\lambda x) + o(\lambda)$$

d'où $$f(x) \underset{\lambda \to 0}{=} df(0)(x) + o(1)$$

donc $$\boxed{f(x) = df(0)(x)}$$

$\underline{2^{\text{ème}}}$ méthode : Valable seulement pour $n=1$ ...

Soit $x \in \mathbb{R}$,

On a que $f(x) = f\left(2 \dfrac{x}{2}\right) = 2 f\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Par récurrence, $f(x) = 2^n f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$

donc $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n - 0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(0)$

donc $\boxed{f(x) = f'(0)x}$