Análisis Combinatorio **2018-I**

Clase 10: 23 de abril

Profesor: Julián Abril *Apuntes por: Viviana Márquez*

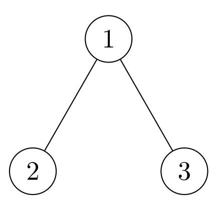
Libro: *Principles and techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong & Koh Khee-Meng. 1992.*

10.1. Teoría de Grafos

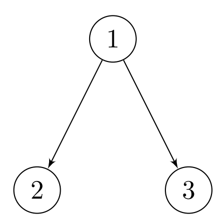
Definición: Grafo.

Sea V un conjunto finito. (Nótese que $\mathbb{P}(V) \to 2^V$).
Un grafo es un par $G = (V, E)$ con $E = \{x \in 2^V ; |X| = 2\}$.

- Si $E \subseteq V \times V$ a G se le llama **digrafo** (grafo dirigido).



Grafo



Digrafo

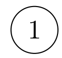
- A E se le llama un conjunto de aristas o arcos.
- V es el conjunto de vértices o nodos.

Definición: Grafo completo.

Un grafo completo es un grafo en el cual para cada par de vértices, existe una arista que los relaciona. También se les conoce como CLIQUE. Un clique de n nodos lo llamaremos n-clique (K_n).

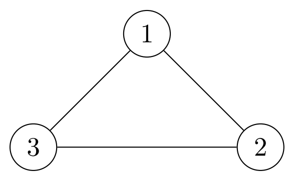
Ejemplos:

- K_1

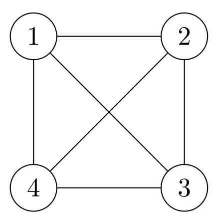


- K_2

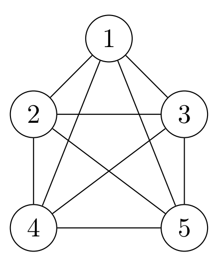
- K_3



- K_4



- K_5



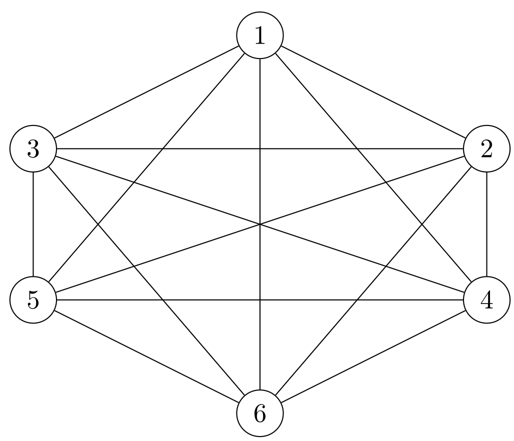
Proposición: El número de aristas de K_n es $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Demostración:
K_n tiene exactamente n vértices y exactamente una arista entre cada par de vértices. Como hay $\binom{n}{2}$ pares de vértices, entonces K_n tiene $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ vértices.

Ejercicio 1: En cualquier reunión de seis personas, o bien tres de ellas se conocen entre sí o bien tres de ellas no se conocen entre sí. (Encontrar subclique, dentro de otro).

Solución:

Las relaciones entre las seis personas puede ser representado por un grafo K_6 que tiene $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ aristas. Supone que las 15 aristas son pintadas entre rojo si las dos personas se conocen y verde si las dos personas no se conocen. A continuación se demostrará que existe al menos un triángulo que tiene todos sus lados del mismo color usando el principio de palomar.



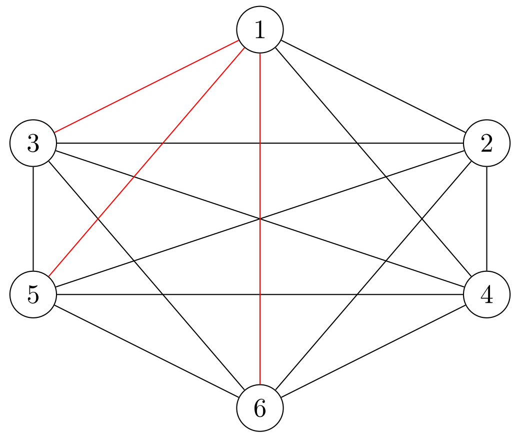
Considere el vértice 1. Este vértice tiene cinco aristas incidentes (12,13,14,15,16). Cada una de estas aristas es coloreada rojo o verde. Usemos el principio de palomar.

- Cajas = colores = $n = 2$.
- Palomas = aristas = $p = 5$.

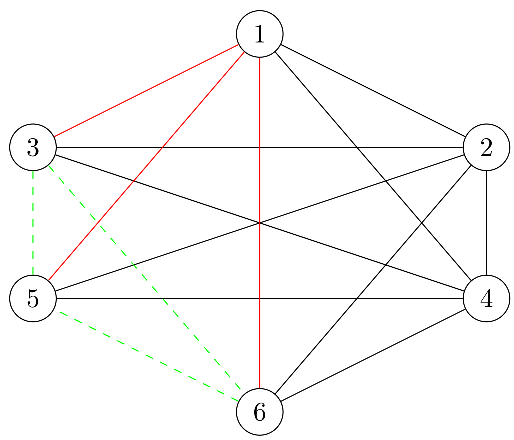
Entonces,

$$p = nk + 1$$
$$5 = 2(k) + 1$$
$$k = 2$$

Por lo tanto, al menos $k + 1 = 2 + 1 = 3$ aristas tienen el mismo color. Sin perdida de generalidad, supongamos que (13,15,16) son rojos.



Ahora considere las aristas (36,35,56). Si cualquiera de esas se colorea de rojo, tendremos un triángulo rojo. Pero si ninguna se colorea de rojo, entonces tendremos un triángulo verde. Por lo tanto, en K_6 existe un triángulo con todos sus lados del mismo color usando dos colores.



Así, en un grupo de seis personas, tres personas necesariamente se conocen o no se conocen.

10.2. Números de Ramsey

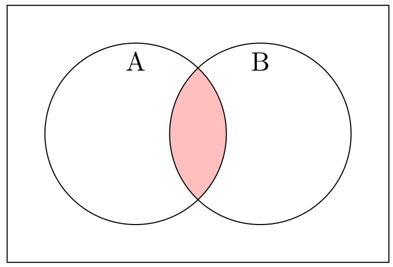
Dados $p, q \in \mathbb{N}$, sea $R(p,q)$ el número natural n más pequeño tal que cualquier coloración de los vértices de un n-clique por dos colores: rojo y verde, existe un p-clique rojo o un q-clique azul. **Ejemplo**: $R(3,3) = 6$.

Propiedades:

1. $R(p,q) = R(q,p)$
2. $R(1,q) = 1$
3. $R(2,q) = q$

10.3. El principio de inclusión y exclusión

El principio de adición se puede reescribir como: Si A y B son conjuntos finitos tal que $A \cap B = \emptyset$, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$. Naturalmente, la siguiente pregunta sería: ¿Qué es $|A \cup B|$ si $A \cap B \neq \emptyset$?. Los elementos de $A \cap B$ serían contados exactamente dos veces.



- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|(A \cup B) \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Ejercicio 2: Sea S el conjunto de los primeros 500 naturales. Encuentre el número de enteros en S que son divisibles por 2,3 ó 5.

Solución:

$$S_k = \{x \in S; k|x\} \text{ con } k = 2, k = 3, k = 5$$

$$S = |S_2 \cap S_3 \cap S_5|$$

$$= |S_2| + |S_3| + |S_5| - |S_2 \cap S_3| - |S_2 \cap S_5| - |S_3 \cap S_5| + |S_2 \cap S_3 \cap S_5|$$

- El número de elementos en S divisibles por n es $\left\lfloor \dfrac{500}{n} \right\rfloor$
- a y b son divisibles por c sii $mcd(a.b)|c$

Así,

$$S = |S_2| + |S_3| + |S_5| - |S_2 \cap S_3| - |S_2 \cap S_5| - |S_3 \cap S_5| + |S_2 \cap S_3 \cap S_5|$$

$$= \left\lfloor \frac{500}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{30} \right\rfloor$$

$$= 366$$

Tarea

Página 137 (Capítulo 3) - 1,4,5,7,30,43,44

Página 173 (Capítulo 4) - 1,2,3