Análisis Combinatorio **2018-I**

Clase 2: 5 de febrero

Profesor: Julián Abril *Apuntes por: Viviana Márquez*

Libro: *Principles and techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong & Koh Khee-Meng. 1992.*

Ejercicio 1:
Sea S el subconjunto de los $\mathbb{N}$ cuyos dígitos pueden ser elegidos de $\{1, 3, 5, 7\}$ tal que no tiene dígitos repetidos. Hallar $|S|$.

Solución:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

donde S_i es la cantidad de dígitos de los números en el conjunto. Dado que son conjuntos disyuntos, podemos usar el principio de la adición.

$$|S_1| = P_1^4 = 4$$
$$|S_2| = P_2^4 = 12$$
$$|S_3| = P_3^4 = 24$$
$$|S_4| = P_4^4 = 24$$

$$|S| = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| = 64$$

Ejercicio 2:
Sea S el subconjunto de los $\mathbb{N}$ cuyos dígitos pueden ser elegidos de $\{1, 3, 5, 7\}$ tal que no tiene dígitos repetidos. Hallar $\sum_{n \in S} n$.

Solución:

Sea $\sum_{n \in S} n = \alpha$, donde α puede ser expresado como $\alpha = 1000\alpha_4 + 100\alpha_3 + 10\alpha_2 + \alpha_1$. A continuación, se sumará la cantidad total de dígitos pertenecientes a cada una de las posiciones decimales α_i en cada uno de los conjuntos S_i.

	α_1	α_2	α_3	α_4
S_1		$\times$	$\times$	$\times$
S_2			$\times$	$\times$
S_3				$\times$
S_4				

Dado que no pueden haber dígitos repetidos, de cuatro dígitos posibles, en cada uno de los elementos de los grupos, se tiene que cada número aparece $\frac{|S_i|}{4}$ veces en cada uno de las posibles posiciones decimales. Por lo tanto,

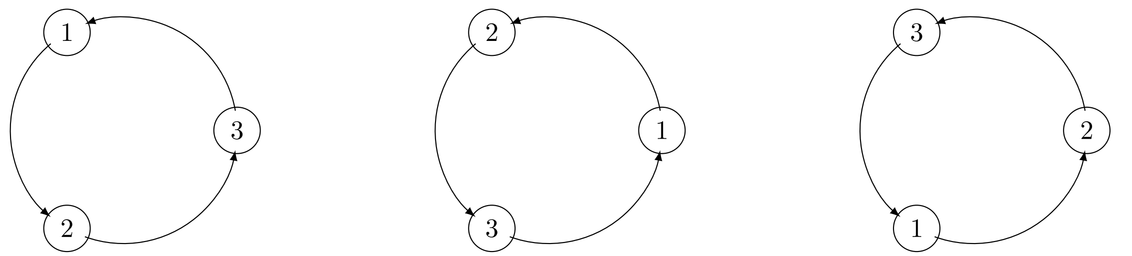
	α_1	α_2	α_3	α_4
S_1	$\frac{4}{4}(1+3+5+7)$	$\times$	$\times$	$\times$
S_2	$\frac{12}{4}(1+3+5+7)$	$\frac{12}{4}(1+3+5+7)$	$\times$	$\times$
S_3	$\frac{24}{4}(1+3+5+7)$	$\frac{24}{4}(1+3+5+7)$	$\frac{24}{4}(1+3+5+7)$	$\times$
S_4	$\frac{24}{4}(1+3+5+7)$	$\frac{24}{4}(1+3+5+7)$	$\frac{24}{4}(1+3+5+7)$	$\frac{24}{4}(1+3+5+7)$

	α_1	α_2	α_3	α_4
S_1	16	$\times$	$\times$	$\times$
S_2	48	48	$\times$	$\times$
S_3	96	96	96	$\times$
S_4	96	96	96	96
Total	256	240	192	96

Así, $\alpha = 1000\alpha_4 + 100\alpha_3 + 10\alpha_2 + \alpha_1 = 1000 \cdot 96 + 100 \cdot 192 + 10 \cdot 240 + 1 \cdot 256 = 117,856$.

2.1 Permutaciones circulares

Observe que las siguientes permutaciones en línea: $\{1,2,3\}, \{2,3,1\}, \{3,2,1\}$, son la misma permutación circular.



Definición: Sea A un conjunto de n objetos distintos y sea $r \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Una **r-permutación** circular de A es una permutación circular de cualesquier distintos objetos formados a partir de A. Se denota por:

$$Q_r^n = \frac{P_r^n}{r}$$

Adicionalmente,

$$Q_n^n = \frac{P_n^n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n} = (n-1)!$$

Ejercicio 3:
Encuentre el número de formas posibles para sentar n parejas de esposos en una mesa redonda en cada uno de los siguientes casos:

a) Hombres y mujeres alternos.

b) Cada mujer está al lado de su esposo.

Solución:

a) Sentamos primero a los hombres. Hay $(n-1)!$ formas de hacer esto. Entre los hombres quedan n espacios donde podemos sentar las mujeres, que dada la formación circular, podemos organizar de $(n-1)!$ formas. Por el principio de la multiplicación, entonces podemos organizar de $(n-1)!^2$ formas a las parejas dada esta configuración.

b) Como cada mujer está al lado de su esposo, podemos considerar cada pareja como un sólo elemento. Es decir que podemos organizar las n parejas de $(n-1)!$ maneras distintas en una configuración circular. Dado que cada una de las n parejas puede organizarse de $2!$ formas, por el principio de multiplicación obtenemos que bajo esta configuración podemos organizar a este grupo de personas de $(n-1!)(2!)^n$ formas.

2.2 Principio del complemento

Sea A un subconjunto de U. Entonces,

$$|U \setminus A| = |U| - |A|$$
$$|A| = |U| - |U \setminus A|$$

2.3 Combinaciones

Sea A un conjunto de n objetos distintos. Una r-combinación de A es un subconjunto de A de r elementos. Se define como,

$$\binom{n}{r} = C_r^n$$

Observe que mientras en las permutaciones estamos hablando de un *arreglo*, y por lo tanto el orden importa, en las combinaciones no importa el orden de los elementos, dado que es un *conjunto*.

Nota: En la vida real esto importa. Por ejemplo, no importa en qué orden se consume el arequipe, la leche condensada y el chocolate, siguen siendo parte del postre. Esto sería una combinación. Mientras que en una clave el orden sí importa, por ejemplo no es lo mismo 137 que 173. Esto es una permutación.

Dado que si escogemos r elementos y tenemos una r-permutación, P_r^n, para obtener un conjunto sin repeticiones debemos dividir por $r!$, así obteniendo C_r^n. Es decir,

$$P_r^n \cdot \frac{1}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_r^n$$

2.3.1 Proposición 1

Sean $n, r \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq n$, entonces

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Demostración:

Algebraicamente podemos ver que:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Pero también,

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Por lo tanto,

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Combinatorialmente, esta demostración se hace por biyección, es decir encontrando una función biyectiva entre dos conjuntos finitos para demostrar que tienen la misma cantidad de elementos.

Tenemos el conjunto $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $f(A) = [n] \setminus A$.

Definimos,

$$f : A \to A^C$$

Entonces tenemos:

$$f(f(A)) = [n] \setminus ([n] \setminus A) = A.$$

Por lo tanto f es su propio inverso, entonces es inyectiva concluyendo la demostración.

Ejemplo:

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 123 & 124 & 125 & 134 & 135 & 145 & 234 & 235 & 245 & 345 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 45 & 35 & 34 & 25 & 24 & 23 & 15 & 14 & 13 & 12 \end{array}$$

2.3.2 Triángulo de Pascal

Observe que la tabla de las combinaciones $\binom{n}{r}$,

$n \backslash r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

es el triángulo de Pascal. Como es bien conocido, cada entrada del triángulo es la suma de las dos entradas inmediatamente superiores. Esto también se puede demostrar desde la combinatoria.

2.3.3 Proposición 2

Sean $n, r \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq n$, entonces

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Demostración:

Algebraicamente, tenemos que:

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!((n-1)-(r-1))!} + \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot r + (n-1)! \cdot (n-r)}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot n}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \binom{n}{r}$$

Ahora, para demostrarlo combinatorialmente también usaremos biyección.

Demostráremos que $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$.

Primero, observe que $\binom{n+1}{r}$ contiene dos clases disyuntas: las que contienen al elemento $n+1$ y las que no.

1. ($\binom{n}{r}$ corresponde a la clase disyunta que no tiene al elemento $\{n+1\}$)

   Sea $f(A) = [n+1] \setminus \{n+1\}$. Así,

$$f : A \to A$$
$$f(f(A)) = [n+1] \setminus \{n+1\}$$

2. ($\binom{n}{r-1}$ corresponde a la clase disyunta que tiene al elemento $\{n+1\}$)

   Sea $f(A) = [n+1] \setminus A^C \cup \{n+1\}$. Así,

$$f : A \to A \cup \{n+1\}$$
$$f(f(A)) = [n+1] \setminus ([n+1]^c \cup \{n+1\})^C \cup \{n+1\} = A$$

Ejemplo:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

$$10 = 6 + 4$$

$\binom{5}{3}$	123	124	125	134	135	145	234	235	245	345
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\binom{4}{2}$			12		13	14		23	24	25
$\binom{4}{3}$	123	124		134			234			

2.3.4 Combinaciones particulares

- Maneras de seleccionar 0 objetos de un conjunto:

$$C_0^n = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$$

- Maneras de seleccionar todos los objetos de un conjunto:

$$C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

- Maneras de seleccionar 1 objeto de un conjunto:

$$C_1^n = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

- Maneras de seleccionar $n-1$ objeto de un conjunto:

  Por complemento del anterior, también obtenemos $C_{n-1}^n = \binom{n}{n-1} = n$.

Tarea

Página 50 del libro, ejercicios 1-8.