Análisis Combinatorio **2018-I**

Clase 3: 12 de febrero

Profesor: Julián Abril *Apuntes por: Viviana Márquez*

Libro: *Principles and techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong & Koh Khee-Meng. 1992.*

Ejercicio 1:
Demostrar que el número de sucesiones binarias con m ceros y $(n-m)$ unos es $\binom{n}{m}$. Con $0 \leq m \leq n$.

Solución:

$$\underbrace{\square\,\square\,\square\,\square\,\cdots\,\square}_{\text{n}}$$

Tenemos m ceros para ubicar en alguna de las n casillas y dado que el orden de los ceros por obvios motivos no importa, entonces esto es $\binom{n}{m}$.

Ejercicio 2:
¿De cuántas maneras puede formarse un comité de 7 personas en un grupo de 15 que consiste de 9 profesores y 6 estudiantes si:

a) no hay restricción?

b) el comité debe incluir 5 profesores?

c) al menos 6 profesores?

d) un profesor y un estudiante particulares?

Solución:

a) Como no hay restricción, no hay distinción entre las 15 personas. Por lo tanto, el comité se puede escoger de $\binom{15}{7}$ formas.

b) Como el comité debe escoger 5 profesores, tenemos $\binom{9}{5}$. Como ya escogimos 5 personas del comité, sólo tenemos dos opciones para los estudiantes, es decir $\binom{6}{2}$. Por el principió de multiplicación, obtenemos $\binom{9}{5} \cdot \binom{6}{2}$.

c) Dado que tenemos conjuntos disyuntos, usaremos el principio de la adición.

$$\left[\binom{9}{6}\cdot\binom{6}{1}\right]+\left[\binom{9}{7}\right]$$

d) Como tenemos un profesor y un estudiante en particular, quedan 5 vacantes en el comité. Es decir, $\binom{13}{5}$.

Ejercicio 3:
Sea A un conjunto de 20 elementos. Encuentre el número de pares diferentes que pueden ser formados de A.

Solución:

$$\binom{20}{2}$$

3.1 Principio de la inyección

Sean A y B dos conjuntos finitos. Si existe una inyección de A a B, entonces $|A| \leq |B|$.

3.2 Principio de la biyección

Sean A y B dos conjuntos finitos. Si existe una biyección de A a B, entonces $|A| = |B|$.

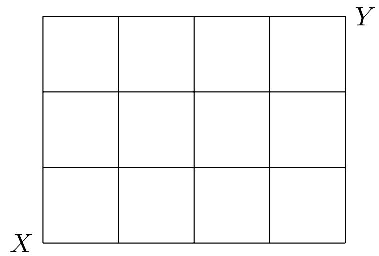
Ejercicio 4:
Si X tiene cardinal n, entonces $|\mathbb{P}(x)| = 2^n$.

Solución:
Consideramos la función biyectiva donde una cadena binaria representa el conjunto, siendo cada elemento del conjunto representado por 1 si está en el subconjunto y por 0 si no está.

$$\mathbb{P}(x) \xrightarrow{f} S^n_{\{0,1\}}$$
$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \mapsto \{a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\} = f(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$$
$$\text{donde } a_i = \begin{cases} 1 & a_i \in A \\ 0 & a_i \notin A \end{cases}$$

La demostración puede ser realizada por inyectiva-biyectiva, o mostrar la inyectividad de la función compuesta.

Ejercicio 5:
Una persona tiene que llegar de X a Y. ¿Cuántas rutas más cortas (es decir, sólo hacia arriba y hacia la derecha) hay?



Solución: Podemos asignar el número 1 a la dirección hacia arriba y 0 a la dirección hacia la derecha. El conjunto de instrucciones puede ser dado en una cadena de bits de tamaño 7, por lo debemos ubicar tres 1s y cuatro 0s en esta cadena. Si ubicamos primero los 1, descubrimos que hay $\binom{7}{3}$ formas de hacerlo.

Tarea

Página 29 - Ejercicio 1.5.3.

Página 51 - Ejercicios 9, 10, 11, 21, 24, 25, 27, 28.