Análisis Combinatorio	**2018-I**

Clase 4: 19 de febrero

Profesor: Julián Abril — *Apuntes por: Viviana Márquez*

Libro: *Principles and techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong & Koh Khee-Meng. 1992.*

Ejemplo 1 (Ejercicio 41 del libro):

Sea $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{A} = \{A \subset X; n \notin A\}$ y $\mathcal{B} = \{A \subset X; n \in A\}$. Muestre que $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ por biyección.

Solución:

- $$\begin{aligned} \mathcal{A} &\to \mathcal{B} \\ A &\mapsto A \cup \{n\} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \mathcal{B} &\to \mathcal{A} \\ A &\mapsto A \setminus \{n\} \end{aligned}$$

Existe la biyección.

Ejemplo 2 (Ejercicio 42 del libro):

Sea $r, n \in \mathbb{N}$. Muestre que el producto

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+r)$$

de r dígitos consecutivos es divisible por $r!$.

Solución:

Reescribamos,

$$
\begin{aligned}
(n+1)(n+2)\dots(n+r) &= \frac{(n+r)!}{n!} \\
&= \frac{r!\cdot(n+r)!}{r!\cdot n!} \\
&= \frac{r!\cdot(n+r)!}{r!\cdot(n+r-r)!} \\
&= r!\cdot\binom{n+r}{r}
\end{aligned}
$$

Nótese que $\binom{n+r}{r} \in \mathbb{Z}$, por lo tanto el producto es divisible por $r!$.

4.1 Arreglos y selecciones con repetición

Ejemplo 3:

Sea $X = \{a, b, c\}$. Encuentre todas las permutaciones con repetición de longitud dos.

Solución:

$$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$$

Son nueve permutaciones. Es decir, 3^2.

4.1.1 r-permutaciones

En general se tiene que el número de **r-permutaciones** con repetición del conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, está dado por n^r, dado que para el primer objeto hay n opciones, pero para el segundo también porque se puede repetir, y así sucesivamente r veces.

$$\underbrace{\boxed{n}\ \boxed{n}\ \boxed{n}\ \dots\ \boxed{n}}_{r}$$

Ejemplo 4:

Tenemos una casa de cuatro pisos y seis pinturas. ¿De cuántas formas podemos pintar la casa?

Solución:

Haciendo uso de las permutaciones con repetición, obtenemos que la respuesta es 6^4.

Ejemplo 5:

Encuentre el número de permutaciones de las letras $abcbb = \{1a, 3b, 1c\}$.

Solución:

Supongamos que las bs son distintos elementos tal que tenemos un conjunto de la forma $\{a, b_1, b_2, b_3, c\}$. Entonces tenemos 5! formas de organizar este conjunto. Pero como tenemos tres bs iguales de las cuales no podemos distinguir su orden, debemos dividir por sus permutaciones. Así obtenemos que el número de permutaciones de la cadena dada es:

$$\frac{5!}{3!}$$

4.1.2 Multiconjuntos

En general, tenemos que dado un conjunto de r elementos, con r_1 elementos de tipo 1, r_2 elementos de tipo dos, ... y r_n elementos de tipo n, donde $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$, el número de distintas permutaciones está dada por:

$$P(r; r_1, r_2, \ldots, r_n) = \frac{r!}{r_1! r_2! \ldots r_n!}.$$

Demostración:

$$\underbrace{\square\,\square\,\square \cdots \square}_{r}$$

De r cajas vacías, escogemos r_1 cajas para ubicar los objetos de tipo 1. Esto es $\binom{r}{r_1}$. Para escoger las cajas de los objetos de tipo 2 tenemos $\binom{r-r_1}{r_2}$ opciones. Así, sucesivamente, tal que:

$$\binom{r}{r_1} \cdot \binom{r-r_1}{r_2} \cdot \binom{r-(r_1+r_2)}{r_3} \cdot \ldots \cdot \binom{r-(r_1+r_2+\ldots+r_{n-1})}{r_n}$$

$$\frac{r!}{r_1! \cdot (r-r_1)!} \cdot \frac{(r-r_1)!}{r_2! \cdot (r-r_1-r_2)!} \cdot \frac{(r-r_1-r_2)!}{r_3!(r-r_1-r_2-r_3)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(r-r_1-r_2-\ldots-r_{n-1})!}{r_n! \cdot (r-r_1-r_2-\ldots-r_{n-1}-r_n)!}$$

$$\frac{r!}{r_1! \cdot \cancel{(r-r_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(r-r_1)!}}{r_2! \cdot \cancel{(r-r_1-r_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(r-r_1-r_2)!}}{r_3!\cancel{(r-r_1-r_2-r_3)!}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{(r-r_1-r_2-\ldots-r_{n-1})!}}{r_n! \cdot \cancelto{0!}{(r-r_1-r_2-\ldots-r_{n-1}-r_n)!}}$$

$$\frac{r!}{r_1!r_2!r_3\ldots r_n!}$$

Ejemplo 6:

Encuentre el número de ternas de longitud 10 con dos 0, tres 1 y cinco 2.

Solución:

$$P(10;2,3,5) = \frac{10!}{2!3!5!}$$

Ejemplo 7:

Demuestre que:

1. $(4n!)$ es un multiplo de $2^{3n} \cdot 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. $\dfrac{(6n)!}{5^n \cdot 3^{2n} \cdot 2^{4n}} \in \mathbb{Z}$.
3. $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^n} \in \mathbb{Z}$.

Solución:

1.

$$\begin{aligned}\frac{(4n!)}{2^{3n}\cdot 3^{n}} &= \frac{(4n!)}{(2^3\cdot 3)^{n}}\\ &= \frac{(4n!)}{24^{n}}\\ &= \frac{(4n!)}{(4!)^{n}}\\ &= P(4n;\underbrace{4,4,\ldots,4}_{n})\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{(6n)!}{5^{n}\cdot 3^{2n}\cdot 2^{4n}} &= \frac{(6n)!}{(5\cdot 3^2\cdot 2^4)^{n}}\\ &= \frac{(6n)!}{(720)^{n}}\\ &= \frac{(6n)!}{(6!)^{n}}\\ &= P(6n;\underbrace{6,6,\ldots,6}_{n})\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n}} = P(n^2;\underbrace{n,n,\ldots,n}_{n})\in\mathbb{Z}$$

Ejemplo extra:

Demuestre que:

$$\frac{(mn)!}{(m!)^{n}}\in\mathbb{Z}$$

Solución:

$$\frac{(mn)!}{(m!)^{n}} = P(mn;\underbrace{m,m,\ldots,m}_{n})\in\mathbb{Z}$$

4.1.3 Selección con repetición

Ejemplo 8:

$$M = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}.$$

Encuentre 5-multiconjuntos de M.

Solución:

$$S_1 = \{5a\}$$
$$S_2 = \{3a, 1b, 1c\}$$
$$S_3 = \{2a, 1b, 2c\}$$
$$etc...$$

Ejemplo 9:

Hay tres tipos de sandwiches: pollo (P), carne (C) y jamón (J). Un niño quiere pedir una orden de seis sandwiches. ¿Cuántos ordenes de sandwiches puede pedir el niño?

Solución:

Algunas posibles ordenes:

	(P)	(C)	(J)
1	$* * * * * *$		
2	$* *$	$* *$	$* *$
3	$*$	$* *$	$* * *$
4	$*$	$* * * *$	$*$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Podemos generar una biyección entre cada de una de las ordenes de tal manera que las columnas entre orden y orden son un 1 y las ordenes son un 0. Por ejemplo las ordenes de arriba son:

1. 00000011
2. 00100100
3. 01001000
4. 01000010

Por lo tanto hemos formado una cadena binaria de ocho espacios, con seis 0 y dos 1, esto es: $\binom{8}{2}$.

Este problema también resuelve H_6^3, es decir, todos los multiconjuntos de seis elementos de $\{\infty \cdot P, \infty \cdot C, \infty \cdot J\}$.

Generalizando, tenemos H_r^n, donde n es el número de tipos de elementos distintos en el multiconjunto y r el número de elementos que vamos a coger.

Tenemos un multiconjunto con n tipos de elementos distintos:

$$M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \infty \cdot a_3, \ldots, \infty \cdot a_n\}$$

que separaremos con $n-1$ lineas para obtener H_r^n:

	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n
S:	$\underbrace{**\ldots*}_{r_1}$	$\underbrace{**\ldots*}_{r_2}$	$\underbrace{**\ldots*}_{r_3}$	$\ldots$	$\underbrace{**\ldots*}_{r_n}$

Obteniendo el subconjunto:

$$S = \{r_1 \cdot a_1, r_2 \cdot a_2, r_3 \cdot a_3, \ldots, r_n \cdot a_n\}$$

Tomando el ejemplo anterior, hacemos una biyección con una cadena de $r + (n-1)$ espacios donde r son los elementos que vamos a coger y $(n-1)$ las barras que vamos a ubicar. Así,

$$\begin{aligned} H_r^n = &= \binom{r+n-1}{n-1} \\ &= \binom{r+n-1}{r} && \text{(usando la igualdad } \tbinom{n}{r} = \tbinom{n}{n-r}\text{.)} \end{aligned}$$

Tarea

Página 50 del libro - ejercicios 21, 29, 31, 32.