Análisis Combinatorio **2018-I**

Clase 5: 26 de febrero

Profesor: Julián Abril *Apuntes por: Viviana Márquez*

Libro: *Principles and techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong & Koh Khee-Meng. 1992.*

5.1 Problemas de distribución

Consiste en contar el número de distribuir r objetos en n conjuntos distintos, de manera que cada objeto esté en una caja y que satisfaga ciertas condiciones.

5.1.1 Distribuir r objetos distintos en n cajas distintas

1. Cada caja puede contener máximo un objeto y el orden importa. Con $r \leq n$.

$$\underbrace{\square\square\square\cdots\square}_{n}$$

$$nPr$$

2. Cada caja puede contener cualquier número de objetos y el orden no importa.

$$n^r$$

3. Cada caja puede contener cualquier número de elementos y el orden importa.

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+r-1) \qquad \text{(factorial creciente)}$$

Inicialmente hay n espacios para ubicar al objeto. Una vez puesto el primero, hay $n+1$ espacios; y así sucesivamente.

5.1.2 Distribuir r objetos idénticos en n cajas distintas

1. Si cada caja puede contener máximo un objeto. Con $r \leq n$.

$$\binom{n}{r}$$

2. Cada caja puede contener cualquier número de objetos. (k-composiciones débiles).

$$H_r^n = \binom{r+n-1}{r}$$

donde $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$ y cada r_i son los objetos que se ponen en la caja i.

3. Cada caja contiene al menos un objeto. Con $r \geq n$. (k-composiciones fuertes).

$$\underbrace{\boxed{*}\;\boxed{*}\;\boxed{*}\;\cdots\;\boxed{*}}_{n}$$

Ubicamos un objeto en cada caja, quedamos con $r - n$ objetos para ubicar de la misma manera que el problema anterior, es decir $H^n_{(r-n)} = \binom{r-n+n-1}{r-n} = \binom{r-1}{r-n}$.

Ejemplo 1:

¿De cuántas formas podemos arreglar las letras de la palabra COLOMBIANO tal que no hayan dos O juntas?

Solución:

$$\underbrace{\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\;\cdots\;\boxed{}}_{10}$$

Tenemos una cadena de tamaño 10. Sentamos primero las siete letras diferentes de 7! maneras. Luego tenemos 8 espacios dónde ubicar las O, esto es $\binom{8}{3}$. Por el principio de multiplicación obtenemos que las letras se pueden organizar de

$$7! \cdot \binom{8}{3}$$

maneras.

Ejemplo 2:

Encuentre el número de soluciones enteras de la ecuación lineal:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

donde las soluciones son una n-upla de enteros no-negativos

Solución:

Por ejemplo,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Posibles soluciones:

$$(4, 1, 1, 1), (1, 4, 1, 1), (0, 0, 7, 0), \ldots$$

Esto es $H_7^4 = \binom{7+4-1}{3} = \binom{10}{3}$.

Para generalizar, aquí estamos con el mismo problema de distribuir r objetos idénticos en n cajas. Podemos generar una función biyectiva, tal que primero sentamos los r unos y los $n-1$ signos más son representados por un cero. De tal forma, tenemos una cadena de $r+n-1$ espacios con $n-1$ ceros que podemos ubicar de la siguiente manera:

$$\binom{r+n-1}{n-1} = H_r^n$$

Adicionalmente, lo siguiente es equivalente:

- H_r^n
- $\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{r+n-1}{r}$
- El número de soluciones enteras no negativas de:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

- El número de formas de distribuir r objetos idénticos en n cajas distintas.
- El número de multiconjuntos de r elementos de $M = \{\cdot a_1, \infty \cdot a_2, \ldots, \infty \cdot a_n\}$.
- El número de formas de seleccionar r objetos de n tipos distintos de objetos con repeticiones permitidas.

5.2 El teorema binomial y algunas identidades combinatoriales

5.2.1 Identidades

1. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

2. $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}, r \geq 1$.

3. $\binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}$.

4. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.

5. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

5.2.2 Teorema binomial

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}x^0y^n \\ &= \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r\end{aligned}$$

Demostración:
Por método combinatorio.

Tenemos que $(x+y)^n$ es:

$$\underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n \text{ veces}}$$

Nótese que cada término tiene la forma $c_k x^{n-k}y^k$, para k entre 0 y n. El coeficiente de cada término es k formas de escoger y de los n factores de $(x+y)$, i.e., $\binom{n}{k}$.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k} + y^k$$

Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 =& c_0 \underbrace{x^{n-k}y^k}_{k=0} + c_1 \underbrace{x^{n-k}y^k}_{k=1} + c_2 \underbrace{x^{n-k}y^k}_{k=2} \\
=& \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \\
=& \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^k + y^{2-k} \\
=& x^2 + 2xy + y^2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Solución:

a) $x = 1,\ y = 1$

b) $\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{vacío}} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{singletons}} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{duplas}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{todos}} = |P(x)| = 2^n$

Ejemplo 4:

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = 0$$

Solución:

$x = -1,\ y = 1.$

Ejemplo 5:

$$\sum_{r=0}^{n} r \cdot \binom{n}{r} = n2^{n-1}$$

Solución:

$x = 1$, entonces:

$$(1+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} y^r$$

Derivando respecto a y, obtenemos:

$$n(1+y)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r \cdot \binom{n}{r} y^{r-1}$$

Cuando $y = 1$,

$$n2^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r \cdot \binom{n}{r}$$

Ejemplo 6:

$$\sum_{r=0}^{n} r^2 \cdot \binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}$$

Ejemplo 7:

$$\sum_{r=0}^{n} r^3 \cdot \binom{n}{r} = n^2(n+3)2^{n-3}$$

Ejemplo 8:

$$\sum_{r=0}^{n} r^k \cdot \binom{n}{r}$$

Tarea

Página 50 del libro - Ejercicios 35, 37, 38, 39, 42, 52, 55, 67, 68, 69, 71, 72.
Cada equipo tiene que hacer dos ejercicios de esa lista.
Laura y yo: 35 y 72.

Trabajo de bases de datos: 19 de marzo. Se pide elección del artículo, título, abstract y base de datos de dónde se adquirió. En inglés y español.