Análisis Combinatorio	**2018-I**

Clase 8: 9 de abril

Profesor: Julián Abril — *Apuntes por: Viviana Márquez*

Libro: *Principles and techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong & Koh Khee-Meng. 1992.*

Lema 1:

$$1 + nx \leq (1+x)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Demostración:

Haciendo uso del teorema binomial, sea $x = 1$ y $y = x$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
(x+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\
&= \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n \\
&= 1 + nx + \ldots \\
&\geq 1 + nx
\end{aligned}$$

Por lo tanto la desigualdad se cumple.

Lema 2:

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Demostración:

Haciendo uso del teorema binomial, sea $x = 1$ y $y = x$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
(x+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\
&= \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n \\
&= \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \ldots + \binom{n}{n}x^n \\
&= \binom{n}{2}x^2 + \ldots \\
&= \frac{n!}{2!(n-2)!}x^2 + \ldots \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + \ldots \\
&\geq \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la desigualdad se cumple.

8.1 Aplicaciones en análisis

Decimos que una sucesión $\{p_n\}$ converge a p si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(p_n, p) < \epsilon$.

Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$:
Si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ entonces siempre existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $Nx > y$.

Ejemplo 1:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1, \quad p > 0$$

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Definimos:

$$x_n = \sqrt[n]{p} - 1$$

1. Caso 1: $p > 1$.

   Despejamos p, obteniendo:

   $$(x_n + 1)^n = p$$

   Por el *lema 1* tenemos que $1 + nx \leq (1 + x)^n$.

   Así,

   $$\begin{aligned} 1 + nx_n &\leq (1 + x_n)^n = p \\ 1 + nx_n &\leq p \\ 0 < x_n &< \frac{p-1}{n} \end{aligned}$$

   Usando la propiedad arquimediana, con $\epsilon > 0$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $N\epsilon > p - 1$. Por lo tanto, si $n \geq N$, entonces

   $$|x_n - 0| \leq \frac{p-1}{n} \leq \frac{p-1}{N} < \epsilon$$

   Por lo tanto, obtenemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

2. Caso 2: $p < 1$.

   Sea $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Recordemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = \frac{1}{S}$. Así pues, como $p < 1$, entonces $p = \frac{1}{q}$ con $q > 1$. Entonces,

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{q}} = 1.$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{n\to 0} \sqrt[n]{n} = 1, \quad p > 0$$

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Definimos:

$$x_n = \sqrt[n]{n} - 1$$

Así, despejando tenemos que:

$$n = (x_n + 1)^n$$

Por el *lema 2* tenemos que $\frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \leq (1+x)^n$.

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 &\leq (1+x)^n = n \\ \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 &\leq n \\ 0 < x_n &< \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$, entonces $x_n \to 0$, así, $\lim_{n\to 0} \sqrt[n]{n} = 1$.

8.2 Principio de palomar

Sea $n, k \in \mathbb{Z}^+$. Deseamos distribuir $nk+1$ elementos en n cajas. Entonces, por lo menos existe una caja con $k+1$ objetos.

Esto se puede demostrar fácilmente por contradicción. Asumamos que ninguna de las n cajas tiene $k+1$ o más elementos. Entonces cada una de las n cajas tiene máximo k elementos, es decir, hay nk elementos en total, lo cual es una contradicción porque hay $nk+1$ elementos. Así, al menos una caja debe tener $k+1$ objetos.

Ejemplo 3: En un grupo de siete personas, deben haber al menos cuatro con el mismo genero (femenino o masculino).

Solución:

Usando el principio de palomar, tenemos que:

- $7 = nk + 1$
- $n = 2$

Así, $k = 3$. Por ende, al menos uno de los dos géneros tiene $k + 1 = 3 + 1 = 4$ personas.

Ejemplo 4: Hay 367 personas. Muestre que al menos dos tienen el mismo cumpleaños.

Solución:

Usando el principio de palomar, tenemos que:

- $367 = nk + 1$
- $n = 365$

Así, $k = 1$. Por ende, al menos uno de los días tiene $k + 1 = 1 + 1 = 2$ personas con cumpleaños en esa fecha.

Ejemplo 5: Hay 28 palabras del idioma español. Hay al menos dos con la misma letra.

Solución:

Usando el principio de palomar, tenemos que:

- $28 = nk + 1$
- $n = 27$ (El alfabeto español tiene 27 letras).

Así, $k = 1$. Por ende, $k + 1 = 1 + 1 = 2$.

Ejemplo 6: Cuántos estudiantes deben haber en una clase para garantizar que al menos dos reciban la misma nota en un examen de puntuación de 0 al 100.

Solución:

Usando el principio de palomar, tenemos que:

- $k + 1 = 2$, por ende $k = 1$
- $n = 101$ (incluyendo el cero)

Así, $nk + 1 = 101(1) + 1 = 102$. Deben haber 102 estudiantes.

Ejercicios para solucionar en casa:

Ejercicio 1: Dado un conjunto con diez números de dos dígitos, probar que existen dos subconjuntos que tienen la misma suma.

Solución:

- Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}\}$ el conjunto con diez números de dos dígitos.
- En primer lugar, obsérvese que hay $2^{10} = 1024$ subconjuntos de cualquier conjunto de díez elementos. No nos interesa contar el conjunto vacio, así que consideremos 1023 subconjuntos.
- En segundo lugar, observe que la suma mínima de uno de estos subconjuntos puede ser $A = \{10\}, \quad S = 10$ y la suma máxima puede ser $A = \{99, 98, 97, 96, 95, 94, 93, 92, 91, 90\}, S = 945$.
- Más aún, quiere decir que el máximo de posibles sumas son 935.

Así, usando el principio de palomar, tenemos que:

- $n = 935$
- $1023 = nk + 1 = 935(k) + 1$

Entonces, $k = 1.093....$ Por ende, redondeando dando que son elementos discretos, tenemos que $k+1 = 1+1 = 2$. Es decir, el número de subconjuntos que al menos tienen la misma suma es 2.

Ejercicio 2: En un grupo de 3000 personas debe haber al menos 9 con la misma fecha de cumpleaños.

Solución:

Usando el principio de palomar, tenemos que:

- $n = 365$
- $3000 = nk + 1$

Así, $k = 8.216....$ Pero como no pueden haber 8.216... personas, debe haber al menos 9 con la misma fecha de cumpleaños.

Tarea

N/A

De la lista anterior, se remueven los ejercicios 28 y 29.