Viviana Márquez
Combinatoria - Profesor Julián Abril
Tarea 3 - Febrero 19, 2018

Página 29 del libro de Chong y Meng, ejercicio 1.5.3.
Página 51 del libro de Chong y Meng, ejercicios 9, 10, 11, 21, 24, 25, 27, 28.

1. **Ejercicio 1.5.3**
Sea $X = \{1, 2, \dots, n\}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Muestre que el número de r-combinaciones de X que no contiene números enteros consecutivos está dado por $\binom{n-r+1}{r}$, donde $0 \leq r \leq n-r+1$.

Solución:
Dado que el orden de los elementos no importan, supongamos que están en orden creciente. Asignaremos una función biyectiva entre cada uno de los elementos del conjunto X de tal forma que se le asigna un 1 si está en la r-combinación y un 0 de lo contrario. Así, creamos una cadena de n espacios donde debemos ubicar r unos no consecutivos. Primero sentamos a los $n-r$ ceros en nuestra cadena. Tenemos $n-r+1$ espacios (contando el espacio del principio) donde podemos ubicar los 1s, así, podemos ubicar los 1s de $\binom{n-r+1}{r}$ maneras.

2. **Ejercicio 9**
Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)(n+2)\dots(2n)$ es divisible por 2^n.

Solución:
Demostración por inducción:

1. Principio de inducción: Verificar que funciona cuando $k = 1$.
$$(1+1) = 2 \text{ es divisible por } 2^1.$$
2. Hipótesis de inducción: Asumir que funciona cuando $n = k$.
$$H = (k+1)(k+2)\dots(k+(k-1))(2k) \text{ es divisible por } 2^k.$$
3. Tesis de inducción: Demostrar que funciona cuando $n = k+1$.
$$((k+1)+1)((k+1)+2)\dots((k+1)+((k+1)-1))(2(k+1))$$
$$T = (k+2)(k+3)\dots(2k+1)(2k+2)$$
$$T = H \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1} = H \cdot 2(k+1)$$
Observe que H es nuestra hipótesis de inducción, y es divisible por 2^k. T es la tesis de inducción y es divisible por un 2 más que H, es decir, T es divisible por 2^{k+1}.

Así, quedando demostrado que:
$$(n+1)(n+2)\dots(2n) \text{ es divisible por } 2^n$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. **Ejercicio 10**
   Encuentre el número de divisores comunes positivos de 10^{40} y 20^{30}.

Solución:
Primero, haciendo uso del Teorema Fundamental de la Aritmética, expresemos los números como sus factores primos:

$$10^{40} = 2^{40} \cdot 5^{40}$$
$$20^{30} = 2^{60} \cdot 5^{30}$$

Por lo tanto, los divisores comunes positivos de los dos números tienen la forma:

$$2^x \cdot 5^y$$

donde $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 40\}$ y $y \in \{0, 1, 2, \ldots, 30\}$.

Por lo tanto, por el principio de multiplicación, obtenemos que 10^{40} y 20^{30} tienen $41 \cdot 31 = 1271$ divisores comunes positivos.

4. **Ejercicio 11**
   En cada uno de los siguientes, encuentre el número de divisores positivos de n que son múltiplos de 3:

   a) $n = 210$
   b) $n = 630$
   c) $n = 151200$

Solución:
Aplicando el razonamiento del ejercicio anterior, obtenemos que:

a) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

   Por lo tanto, los divisores positivos de 210 que son múltiplos de 3 son de la forma:

$$3 \cdot 2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$$

   donde $x, y, z \in \{0, 1\}$.

   Por lo tanto, por el principio de multiplicación, obtenemos que 210 tiene $2 \times 2 \times 2 = 8$ divisiores que son múltiplos de 3.

b) $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

   Por lo tanto, los divisores positivos de 630 que son múltiplos de 3 son de la forma:

$$3 \cdot 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^w$$

   donde $x, y, z, w \in \{0, 1\}$.

   Por lo tanto, por el principio de multiplicación, obtenemos que 630 tiene $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ divisiores que son múltiplos de 3.

c) $151200 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

   Por lo tanto, los divisores positivos de 630 que son múltiplos de 3 son de la forma:

$$3 \cdot 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^w$$

   donde $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $y, z \in \{0, 1, 2\}$, $w \in \{0, 1\}$

   Por lo tanto, por el principio de multiplicación, obtenemos que 151200 tiene $6 \times 3 \times 3 \times 2 = 108$ divisiores que son múltiplos de 3.

5. **Ejercicio 21**
Encuentre el número de $(m+n)$-sucesiones binarias con m 0s y n 1s tal que no hay dos unos adyacentes, donde $n \leq m+1$.

Solución:

$$\underbrace{\square\,\square\,\square\,\square\,\cdots\,\square}_{m+n}$$

Primero ubicamos los m ceros. Entre ellos pueden ir los unos, es decir, los unos tienen $m+1$ espacios donde se pueden ubicar (contando con el espacio del principio). De tal forma, dado que el orden no importa, podemos ubicar los unos de $\binom{m+1}{n}$ formas, lo cual coincide con el número de $(m+n)$-sucesiones binarias.

6. **Ejercicio 24**
Una caja contiene 7 pelotas blancas idénticas y 5 pelotas negras idénticas. Se van a seleccionar aleatoriamente, una a la vez sin remplazo, hasta que la bolsa quede vacía. Encuentre la probabilidad que la sexta bola retirada sea blanca, con antes exactamente tres bolas negras.

Solución:

Queremos que:

$$\underbrace{\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{BLANCA}\,\boxed{}\,\cdots\,\boxed{}}_{12}$$

Primero, calculamos la posibilidad de que en las primeras cinco casillas halla exactamente tres bolas negras. Es decir, la posibilidad de escoger exactamente tres bolas negras de las cinco por dos blancas de las siete, sobre las formas de escoger cinco bolas de doce sin restricción alguna. Esto es,

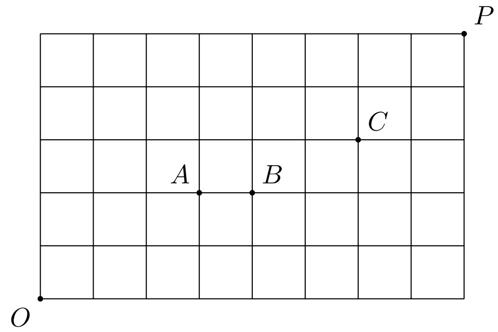
$$\frac{\binom{5}{3}\binom{7}{2}}{\binom{12}{5}} = \frac{35}{132}$$

Como ya hemos escogido dos bolas blancas, y en total cinco bolas, tenemos que la probabilidad de que en la sexta casilla haya una blanca es de $\dfrac{7-2}{12-5} = \dfrac{5}{7}$. Usando el principio de la multiplicación, obtenemos que:

$$\frac{35}{132} \cdot \frac{5}{7} = \frac{25}{132} = 0.19$$

Por lo tanto, la probabilidad de que este escenario ocurra es de 0.19%.

7. **Ejercicio 25**
En cada uno de los siguientes casos, encuentre el número de rutas más cortas de O a P en el sistema de calles que vemos a continuación.



a) Las rutas deben pasar en el punto A
b) Las rutas deben pasar a través de la calle AB
c) Las rutas deben pasar a través de los puntos A y C
d) La calle AB está cerrada

Solución:
Sea 0 derecha y 1 hacia arriba. Generaremos una biyección con una sucesión binaria.

a) Primero haremos las rutas que llegan hasta A y después calcularemos las rutas que llegan desde A hasta P, haciendo uso de un ejercicio ya desarrollado en clase, para después usar el principio de la multiplicación.

- Posibles rutas $O - A$: Tenemos una cadena de 5 espacios y dos pasos hacia arriba. Así, vemos que hay $\binom{5}{2}$ formas de llegar desde O hasta A.
- Posibles rutas $A - P$: Tenemos una cadena de 8 espacios y tres pasos hacia arriba. Así, vemos que hay $\binom{8}{3}$ formas de llegar desde A hasta P.

Por lo tanto, en total hay $\binom{5}{2}\binom{8}{3}$ formas de llegar de O a P pasando por A.

b) Primero haremos las rutas que llegan hasta A y después calcularemos las rutas que llegan desde B hasta P, para después usar el principio de la multiplicación.

- Posibles rutas $O - A$: Tenemos una cadena de 5 espacios y dos pasos hacia arriba. Así, vemos que hay $\binom{5}{2}$ formas de llegar desde O hasta A.
- Posibles rutas $A - P$: Tenemos una cadena de 7 espacios y tres pasos hacia arriba. Así, vemos que hay $\binom{7}{3}$ formas de llegar desde A hasta P.

Por lo tanto, en total hay $\binom{5}{2}\binom{7}{3}$ formas de llegar de O a P pasando por AB.

c) Primero haremos las rutas que llegan hasta A, después calcularemos las rutas que llegan desde A hasta C y finalmente las rutas desde C hasta P, para después usar el principio de la multiplicación.

- Posibles rutas $O - A$: Tenemos una cadena de 5 espacios y dos pasos hacia arriba. Así, vemos que hay $\binom{5}{2}$ formas de llegar desde O hasta A.
- Posibles rutas $A - C$: Tenemos una cadena de 4 espacios y un paso hacia arriba. Así, vemos que hay $\binom{4}{1}$ formas de llegar desde A hasta C.
- Posibles rutas $C - P$: Tenemos una cadena de 4 espacios y dos pasos hacia arriba. Así, vemos que hay $\binom{4}{2}$ formas de llegar desde C hasta P.

Por lo tanto, en total hay $\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{2}$ formas de llegar de O a P pasando por A y C.

d) Haciendo uso del principio del complemento, primero calcularemos el número total de rutas y después restaremos las rutas obtenidas en la parte b) de este ejercicio.

- Total rutas: Tenemos una cadena de 13 espacios y cinco pasos hacia arriba. Así, vemos que hay $\binom{13}{5}$ formas de llegar desde A hasta P.

Por lo tanto, hay $\binom{13}{5} - \left[\binom{5}{2}\binom{7}{3}\right]$ formas de evitar AB.

8. **Ejercicio 27**
Sea $S = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ donde $n \geq 2$, y sea $T = \{(x, y, z) \in S^3; x < z \text{ y } y < z\}$. Muestre por conteo de $|T|$ en dos categorias diferentes que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = |T| = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

Solución:
Fijemos $k = z \in \{2, 3, \ldots, n+1\}$, así obtenemos triplas de la forma (x, y, k) donde x y y pueden ser escogidos de los $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ términos menores que k. Como son dos, tenemos $(k-1)^2$ por el principio de multiplicación. Ahora, usando el principio de la adición, obtenemos que:

$$|T| = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2 = \sum_{k-1}^{n} k^2$$

Ahora, por conteo podemos ver que existen dos tipos de triplas:

- Cuando $x = y$, por lo tanto podemos escoger x y z de $\binom{n+1}{2}$ formas.
- Cuando $x \neq y$, por lo tanto podemos escoger x, y y z de $\binom{n+1}{3}$ formas. Dado que el orden de x y z si importa, a este número lo debemos multiplicar por $2!$. En total obteniendo $2 \times \binom{n+1}{3}$ formas.

Como tenemos dos conjuntos de triplas distintos, por el principio de adición vemos que:

$$|T| = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

Y por ende:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = |T| = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

Lo cual también podemos verificar algebraicamente:

$$\begin{aligned}
|T| = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3} &= \frac{(n+1)!}{(n+1-2)!2!} + \frac{(n+1)!}{(n+1-3)!3!} \\
&= \frac{(n+1)! \cdot 3 + 2 \cdot (n+1)! \cdot (n+1-2)}{3!(n+1-2)!} \\
&= \frac{(n+1)!(3 + 2n + 2 - 4)}{3!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+1)!(2n+1)}{3!(n-1)!} \\
&= \frac{(n+1) \cdot n \cdot (2n+1)}{6} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2
\end{aligned}$$

9. **Ejercicio 28**
Considere el siguiente conjunto de puntos en el plano $x - y$:

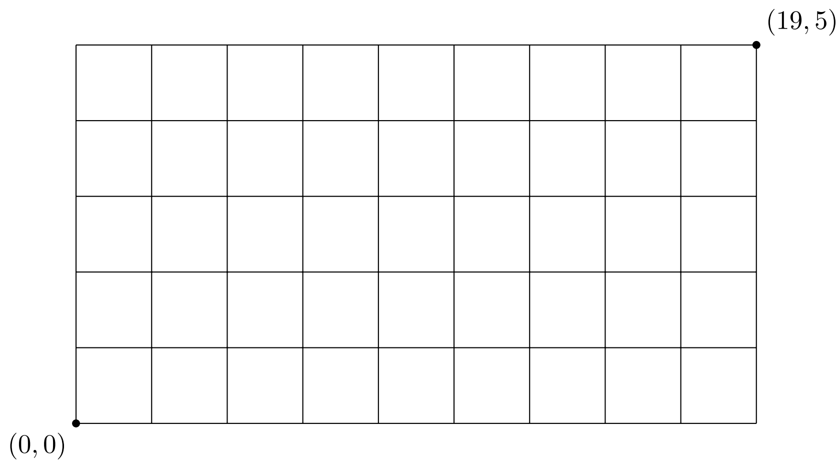
$$A = \{(a, b); a, b \in \mathbb{Z}, 0 \leq a \leq 9 \text{ y } 0 \leq b \leq 5\}.$$

Encuentre

a) el número de rectángulos cuyos vértices son puntos en A.

b) el número de cuadrados cuyos vértices son puntos en A.

Solución:



a) Para escoger la altura del rectángulo tenemos cinco opciones de tamaño uno, cuatro opciones de tamaño dos, ... , una opción de tamaño cinco. Es decir $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ opciones. De manera análoga, escogemos la base del cuadrado tal que tenemos $9 + 8 + \ldots + 1 = 45$. Por el principio de multiplicación, vemos que hay $15 \times 45 = 675$ posibles rectángulos en A.

Otra forma de resolver este problema combinatorialmente es ver los vértices del rectángulo dos números que tenemos que escoger del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ para la base y dos números que tenemos que escoger del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 5\}$ para la altura. Esto es:

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{6}{2} = 45 \cdot 15 = 675$$

b)
- El número de cuadrados de tamaño 1: $9 \cdot 5 = 45$
- El número de cuadrados de tamaño 2: $8 \cdot 4 = 32$
- El número de cuadrados de tamaño 3: $7 \cdot 3 = 21$
- El número de cuadrados de tamaño 4: $6 \cdot 2 = 12$
- El número de cuadrados de tamaño 5: $5 \cdot 1 = 5$

Por el principio de adición, obtenemos que hay $45 + 32 + 21 + 12 + 5 = 115$ posibles cuadrados en A.