Viviana Márquez
Combinatoria - Profesor Julián Abril
Tarea 4 - Febrero 26, 2018

Página 51 del libro de Chong y Meng, ejercicios 21, 29, 31, 32.

1. **Ejercicio 21**
   Encuentre el número de $(m+n)$-sucesiones binarias con m 0s y n 1s tal que no hay dos unos adyacentes, donde $n \leq m+1$.

   Solución:

   $$\underbrace{\square\,\square\,\square\,\square\,\cdots\,\square}_{m+n}$$

   Primero ubicamos los m ceros. Entre ellos pueden ir los unos, es decir, los unos tienen $m+1$ espacios donde se pueden ubicar (contando con el espacio del principio). De tal forma, dado que el orden no importa, podemos ubicar los unos de $\binom{m+1}{n}$ formas, lo cual coincide con el número de $(m+n)$-sucesiones binarias.

2. **Ejercicio 29**
   Quince puntos $P_1, P_2, \ldots, P_{15}$ son dibujados en el plano de tal forma que aparte que P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 son co-lineares, no otros tres puntos son co-lineares. Encuentre:

   a) el número de líneas rectas por las cuales pasan al menos 2 de los 15 puntos.

   b) el número de triángulos cuyos vertices son 3 de los 15 puntos.

   Solución:

   a) Si todos los puntos no estuvieran en la misma linea, serían $15C2 = 105$. Pero debemos restar $5C2 = 10$ que son las lineas que no se forman por los puntos colineales, donde sólo se forma una línea. Por lo tanto la respuesta es $15C2 - 5C2 + 1 = 96$.

   b) El total de triángulos que se formarían si los puntos no estuvieran en la misma linea serían $15C3 = 455$, pero debemos descontar $5C3 = 10$ triángulos que no se forman porque están en la misma linea, es decir tenemos 445 triángulos.

3. **Ejercicio 31**
En cada uno de los siguientes números naturales de siete dígitos:

$$1001011, 5550000, 3838383, 7777777,$$

cada dígito en el número aparece al menos tres veces. Encuentre el número de tales números naturales de siete dígitos.

Solución:
Dado que cada número debe aparecer al menos tres veces, tenemos dos conjuntos de soluciones disyuntas:

- Todos los números son el mismo en el número natural de siete dígitos.

  Para este caso tenemos 9 posibles números, dado que 0000000 no es un número valido.

- Aparecen dos números en el número natural de siete dígitos.

  Para este caso tenemos que un número aparece cuatro veces y el otro aparece tres veces. De tal modo que tenemos:

  $$P_2^{10} \cdot \frac{7!}{4!3!} = 3150$$

  Donde P_2^{10} es el número de parejas de dos números que puedo escoger del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ y $\frac{7!}{4!3!}$ la forma en que puedo organizar una cadena de tamaño siete donde hayan 4 del primer elemento y 3 del segundo elemento. Aquí estamos usando el principio de la multiplicación.

  Pero a este número debemos quitarle los números que no son válidos, es decir los números que comienzan en 0, de los cuales hay:

  i) $0000\square\square\square$
  En los espacios obligatoriamente debe ir otro número, por lo tanto hay 9 números de este tipo.

  ii) $000X\square\square\square$
  Fijamos un número para que no hayan cadenas repetidas con el número anterior. En los espacios obligatoriamente debe ir dos números más del X y el otro número puede ser un X o un 0. Esto es: $9 + 9 \cdot \left(\frac{3!}{2!1!}\right) = 36$.

  iii) $00X\square\square\square\square$
  Fijamos un número para que no hayan cadenas repetidas con cadenas ya contadas. En los espacios obligatoriamente debe ir dos números más del X y un cero. El otro número puede ser un X o un 0. Esto es: $9 \cdot \left(\frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{4!}{2!2!}\right) = 90$.

  iv) $0X\square\square\square\square\square$
  Fijamos un número para que no hayan cadenas repetidas con cadenas ya contadas. En los espacios obligatoriamente debe ir dos números más del X y dos ceros. El otro número puede ser un X o un 0. Esto es: $9 \cdot \left(\frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{2!3!}\right) = 180$.

  Por lo tanto, por el principio de adición, tenemos $180 + 90 + 36 + 9 = 315$ cadenas que debemos remover.

Así, tenemos $9 + 3150 - 315 = 2844$ posibles números naturales de siete dígitos con estas características.

4. **Ejercicio 32**
Sea $X = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$. Encuentre el número de conjuntos de dos elementos $\{a, b\}$ de X tal que el producto $a \cdot b$ es divisible por 5.

Solución:
En primer lugar, observamos que hay $\frac{1000}{5} = 200$ múltiplos de cinco en X. Así, usando el principio de multiplicación y dado que $\{a, b\}$ es un conjunto, tomamos:

1. A 5 lo multiplicamos por los 999 elementos restantes del conjunto.
2. A 10 lo multiplicamos por los 998 elementos restantes del conjunto.
3. A 15 lo multiplicamos por los 997 elementos restantes del conjunto.

$\vdots$

Lo cual podemos generalizar, haciendo uso del principio de la adición, de la siguiente manera para obtener la respuesta:

$$\sum_{i=1}^{200} (1000 - i) = 179,900$$