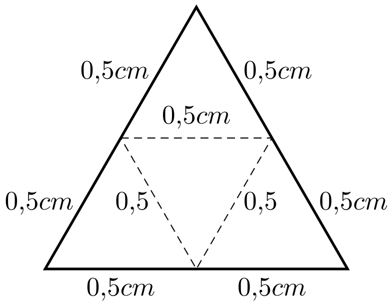
KONRAD LORENZ
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Viviana Márquez
Combinatoria - Profesor Julián Abril
Tarea 7 - Abril 30, 2018

Capítulo 3 del libro de Chong y Meng, ejercicios 1,4,5,7,30,43,44.
Capítulo 4 del libro de Chong y Meng, ejercicios 1,2,3

1. **Ejercicio 1**
   Muestre que de cinco puntos en un triángulo equilátero de lado de tamaño 1, hay al menos dos puntos cuya distancia es máximo 0,5 de tamaño.

Solución:



Usando las propiedades de los triángulos equiláteros podemos dividir el triángulo en cuatro subtriángulos equiláteros. Es claro que si dos puntos están en el mismo compartimientola mayor distancia entre ellos puede ser $0{,}5cm$. Así pues,

- Cajas = subtriángulos = $n = 4$.
- Palomas = puntos $p = 5$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
p &= nk + 1 \\
5 &= 4(k) + 1 \\
k &= 1
\end{aligned}
$$

Así, por el principio de palomar, $k + 1 = 1 + 1 = 2$. Es decir, al menos dos puntos están a una distancia máximo de $0{,}5cm$.

2. **Ejercicio 4**
Muestre que dado cualquier conjunto de cinco números, hay al menos tres números en el conjunto cuya suma es divisible por tres.

> **Solución:**
>
> En primer lugar, nótese que cada elemento del conjunto pertenece a una clase de equivalencia módulo 3:
>
> - $a \cong 0 \mod 3$
> - $b \cong 1 \mod 3$
> - $c \cong 2 \mod 3$
>
> Usando el principio de palomar, obtenemos:
>
> - Cajas = clases de equivalencia = $n = 3$.
> - Palomas = números $p = 5$.
>
> Entonces,
>
> $$p = nk + 1$$
> $$5 = 3(k) + 1$$
> $$k = 2$$
>
> Así, por el principio de palomar, $k + 1 = 3$. Es decir, al menos tres elementos pertenecen a la misma clase de equivalencia. Y si tres elementos pertenecen a la misma clase de equivalencia $\mod 3$ eso quiere decir que su suma es divisible por tres.

3. **Ejercicio 5**
Sea A el conjunto de $n + 1$ elementos, donde $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que existe $a, b \in A$ con $a \neq b$ tal que $n|(a - b)$

> **Solución:**
>
> En primer lugar, nótese que cada elemento del conjunto pertenece a una clase de equivalencia módulo n tal que:
>
> - $a \cong 0 \mod n$
> - $b \cong 1 \mod n$
> - $\vdots$
> - $z \cong n - 1 \mod n$
>
> Si dos elementos, sean $a, b \in A$, pertenecen a la misma clase de equivalencia, la diferencia de estos dos elementos es divisible por n. Así,
>
> - Cajas = clases de equivalencia = $n = n$.
> - Palomas = números $p = n + 1$.
>
> Entonces,
>
> $$p = nk + 1$$
> $$n + 1 = n(k) + 1$$
> $$k = 1$$
>
> Así, por el principio de palomar, $k + 1 = 2$. Es decir, al menos existen dos $a, b \in A$ elementos tal que $n|(a - b)$.

4. **Ejercicio 7**
Sea $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tal que $|A| = n + 1$, donde $n \in \mathbb{N}$. Muestre que existe $a, b \in A$, con $a \neq b$ tal que $a|b$

Solución:

Dividamos a A en n elementos conjuntos tal que en cada conjunto un elemento divide al otro. Por el ejercicio anterior, se sabe que existen al menos dos elementos en el mismo conjunto dado que el tamaño de A es $n+1$. Y si dos elementos están en el mismo conjunto, entonces existe un a que divide a b.

5. **Ejercicio 30**
Muestre que

- $R(p, q) = R(q, p) \forall p, q \in \mathbb{N}$
- $R(2, q) = q, \forall q \in \mathbb{N}$

Solución:

- $R(p, q) = R(q, p) \forall p, q \in \mathbb{N}$
  Recordemos que el número de Ramsey $R(p, q)$ indica que al menos p personas se conocen entre sí o q personas no se conocen entre sí. En lenguaje de teoría de grafos, esto quiere decir que dado grafo contiene un clique de tamaño p o un conjunto independiente de tamaño q. Si invertimos el grafo, es decir, donde había un vértice ahora no lo hay y viceversa, se obtiene un grafo con un clique de tamaño q y un conjunto independiente de tamaño p. Por lo tanto, así quedando demostrada la propiedad de simetría.
- $R(2, q) = q, \forall q \in \mathbb{N}$
  - $R(2, q) \leq q$:
    En primer lugar, si consideramos K_n con dos colores, o todas sus aristas son del mismo color o hay una que es de color distinto.
  - $R(2, q) \geq q$:
    En segundo lugar, se estudia la coloración de K_{n-1} tal que no hay ni un K_2 del primer color o toda la coloración del segundo lugar.

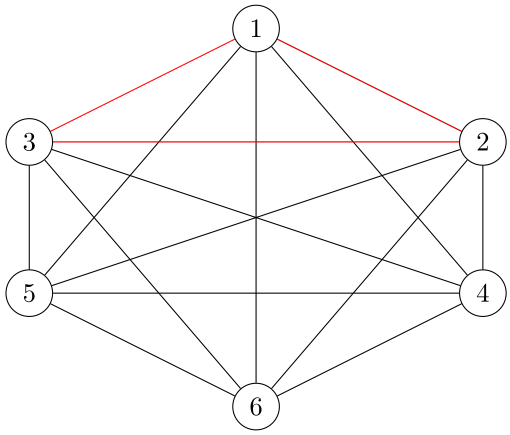
  Así, juntando las dos desigualdades vemos que $R(2, q) = q$.

6. **Ejercicio 43**
Un p-clique es monocromático si todas sus aristas son coloreadas por el mismo color.

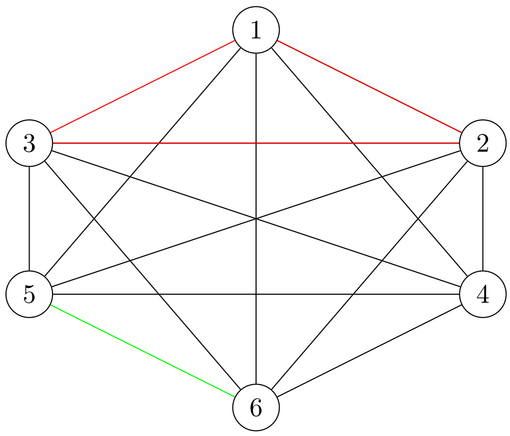
- Muestre que para cualquier coloreada de las aristas del 6-clique K_6 por dos colores: verde o rojo, existe al menos dos K_3 monocromáticos. (No necesariamente disjuntos).
- De una coloración de las aristas de K_6 por dos colores tal que no hay tres K_3 monocromáticos.

Solución:

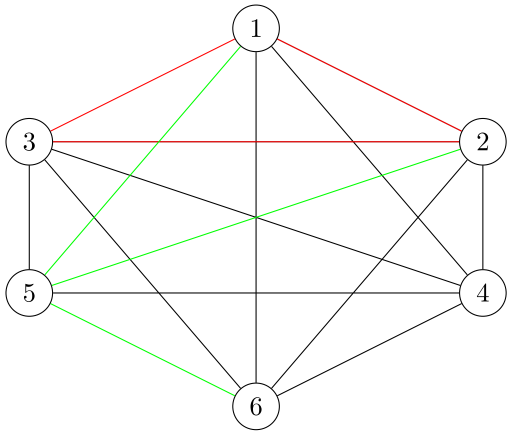
- Muestre que para cualquier coloreada de las aristas del 6-clique K_6 por dos colores: verde o rojo, existe al menos dos K_3 monocromáticos. (No necesariamente disjuntos).
Dado que $R(3,3) = 6$, sabemos que existe un K_3 monocromático, sin perdida de generalidad sea este rojo.



Considere los otros tres vértices. Si no hay vértices verdes entre ellos, encontramos un segundo triángulo rojo. Entonces supongamos que sí encontramos un vértice verde. Sin perdida de generalidad, sea $(5,6)$.

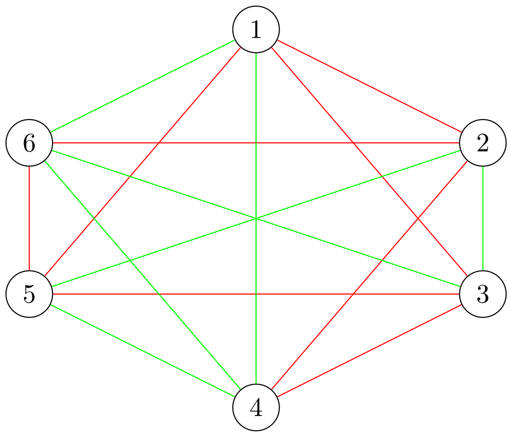


Si hay dos vertices rojos entre 5 y el triángulo rojo, encontramos otro triángulo rojo. Supongamos que no.



Nótese que sin importar qué coloración se le den a los vértices entre 6 y el triángulo rojo, obtendremos un triángulo rojo o un triángulo verde. Así, hemos demostrado que K_6 contiene al menos dos triángulos monocromáticos.

- De una coloración de las aristas de K_6 por dos colores tal que no hay tres K_3 monocromáticos.



7. **Ejercicio 44**
Las aristas de K_7 son coloreadas por dos colores: verde o rojo. Muestre que hay al menos cuatro K_3 monocromáticos en la configuración restante.

Solución:

Haciendo uso del ejercicio anterior, sabemos que para K_6 deben existir al menos dos K_3 monocromáticos. Si agregamos un nodo más a K_6 para convertirlo a K_7, añadimos seis aristas más que pueden ser coloreadas de uno o otro color. Usando el principio de palomar, vemos que al menos cuatro vértices tienen el mismo color, así formando otros dos K_3 para un total de cuatro K_3 en K_7.

8. **Ejercicio 1**
Un grupo de 100 estudiantes tomaron exámenes en Chino, Inglés y Matemáticas. Entre ellos, 92 pasaron Chino, 75 Inglés y 63 Matemáticas. Máximo 65 pasaron Chino e Inglés, máximo 54 Chino y Matemáticas, y máximo 48 Inglés y Matemáticas. Encuentre el mayor número posible de estudiantes que pudieron haber pasado las tres materias.

Solución:

Usando los principios de conjuntos, se tiene:

$$(A \cup B \cup C) = A + B + C - (A \cap B) - (A \cap C) - (B \cap C) + (A \cap B \cap C)$$

Sea $A =$ Chino, $B =$ Inglés, $C =$ Matemáticas. Así:

$$100 = 92 + 75 + 63 - (65) - (54) - (48) + (A \cap B \cap C)$$
$$100 = 63 + (A \cap B \cap C)$$
$$37 = (A \cap B \cap C)$$

Por lo tanto máximo 37 pudieron haber pasado las tres materias.

9. **Ejercicio 2**

a) Sea A, B y C conjuntos finitos. Muestre que
   I. $|\overline{A} \cap B| = |B| - |A \cap B|$
   II. $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap C| = |C| - |A \cap C| = |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

b) Encuentre el número de enteros en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 10^3\}$ que no son divisibles ni por 5 ni por 7, pero que son divisibles por 3.

Solución:

I. $|\overline{A} \cap B| = |B| - |A \cap B|$
Nótese que en esta notación $\overline{A}$ es lo mismo que A^c. Así, podemos ver fácilmente que el lado izquierdo de la igualdad es la lunita de B sin las cosas de A, y el lado derecho es justamente B sin la intersección de las cosas con A.

II. $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap C| = |C| - |A \cap C| = |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
Usando el punto anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} |\overline{A} \cap \overline{B} \cap C| &= |\overline{B} \cap C| - |A \cap \overline{B} \cap C| \\ &= |C| - |B \cap C| - |A \cap \overline{B} \cap \overline{C}| \\ &= |C| - |A \cap C| = |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

a) Encuentre el número de enteros en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 10^3\}$ que no son divisibles ni por 5 ni por 7, pero que son divisibles por 3.

Nótese que el cardinal del conjunto es $|A| = 1000$. Los números divisible por 3 son $\left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor$ mientras que los divisibles por 5 y 7 son $\left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor$ respectivamente. Así, el resultado que buscamos es:

$$r = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{105} \right\rfloor$$

$$= 333 - 66 - 47 + 9$$

$$= 229.$$

10. **Ejercicio 3**
Encuentre el número de enteros en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 120\}$ que son divisibles por exactamente $'m'$ de los enteros $2, 3, 5, 7$ donde $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Encuentre también el número de primos que no exceden 120.

Solución:

Sea S_i el conjunto de números divisibles por i donde $i \in 2, 3, 5, 7$. Así,

- $|S_2| = \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor = 60$
- $|S_3| = \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor = 40$
- $|S_5| = \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24$

- $|S_7| = \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17$

Así, por ejemplo, para $m = 4$

$$m_4 = \left\lfloor \frac{120}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor = 0$$

Para $m = 3$

$$m_3 = \left\lfloor \frac{120}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor = 8$$

Y así sucesivamente.