Viviana Márquez
Combinatoria - Profesor Julián Abril
Tarea 8 -

Capítulo 2 del libro de Chong y Meng, ejercicios 4,5,7,30.

1. **Ejercicio 4**
   Díez puntos están en un círculo. ¿Cuántos polígonos convexos de tres o más lados pueden dibujarse usando algunos o todos los díez puntos como vértices?

Solución:

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \ldots + \binom{10}{10} = 968$$

2. **Ejercicio 5**
   Encuentre el coeficiente de x^5 en la expansión de $(1 + x + x^2)^8$.

Solución:

$$(1 + x + x^2)^8 = \left(\frac{1 - x^3}{1 - x}\right)^8$$

$$= \left(\frac{1}{1 - x}\right)^8 (1 - x^3)^8$$

$$= \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{r + 8 - 1}{r} x^r\right) (x^24 - 8x^21 + 28x^18 - 56x^15 + 70x^12 - 56x^9 + 28x^6 - 8x^3 + 1)$$

Para hallar el coeficiente de x^5 computamos:

$$-8x^3 \cdot \binom{2 + 8 - 1}{2} x^2 + \binom{5 + 8 - 1}{5} x^5 =$$

$$-8x^3 \cdot 36x^2 + 792x^5 =$$

$$-288x^5 + 792x^5 =$$

$$504x^5.$$

3. **Ejercicio 7**
Encuentre el coeficiente de x^{18} en la expansión de $(1 + x^3 + x^5 + x^7)^{100}$.

Solución:

$$(1 + x^3 + x^5 + x^7)^{100} = \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4} \binom{100}{n_1, n_2, n_3, n_4} x^{3_{n_2}} x^{5_{n_3}} x^{7_{n_4}}$$

con

$$\{(n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z} \mid n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \leq 100, 3n_2 + 5n_3 + 7n_4 = 18\}$$

Así, obtenemos que el coeficiente de x^{18} es:

$$\binom{100}{6} + 97 \cdot 98 \cdot \binom{100}{2} + 97 \cdot \binom{100}{3}$$

4. **Ejercicio 30**
Demuestre que:

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} \binom{n}{r} = \binom{n-1}{m}$$

Para $m \leq n - 1$.

Solución:

Usando el teorema binomial, hacemos $x = -1, y = 1$.

Así,

$$((-1) + 1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^{n-r} 1^r$$

$$0 = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^{n-r}$$